10.4. GEOMETRIA

Körrel kapcsolatos ismeretek – megoldások

2249 A körcikk területét T-vel, a határoló körív hosszát i-vel jelöltük.

a) $T = 8{,}38\ \text{cm}^2,\ i = 2{,}09$ cm; *b)* $T = 33{,}51\ \text{cm}^2,\ i = 8{,}38$ cm;
c) $T = 64{,}23\ \text{cm}^2,\ i = 16{,}06$ cm; *d)* $T = 83{,}78\ \text{cm}^2,\ i = 20{,}94$ cm;
e) $T = 150{,}80\ \text{cm}^2,\ i = 37{,}70$ cm; *f)* $T = 167{,}55\ \text{cm}^2,\ i = 41{,}89$ cm.

2250 A körcikk középponti szögét α-val jelölve:

a) $\alpha = 57{,}30° = 1$ radián; *b)* $\alpha = 91{,}67° = 1{,}6$ radián;
c) $\alpha = 137{,}51° = 2{,}4$ radián; *d)* $\alpha = 286{,}48° = 5$ radián.

2251 A körcikk sugarát r-rel, a középponti szögét α-val jelölve:

a) $r = 8$ cm, $\alpha = 57{,}30° = 1$ radián; *b)* $r = 5{,}47$ cm, $\alpha = 122{,}61° = 2{,}14$ radián;
c) $r = 4{,}62$ cm, $\alpha = 171{,}89° = 3{,}00$ radián.

2252 A körgyűrűcikk területe a nagyobb sugarú körcikk és a kisebb sugarú körcikk területének különbsége. A nagyobb körcikk területe $T = \dfrac{70^2 \cdot \pi \cdot 50°}{360°} \approx 2138{,}03\ \text{m}^2$, a kisebbé $t = \dfrac{20^2 \cdot \pi \cdot 550°}{360°} \approx$ $\approx 174{,}53\ \text{m}^2$. A nézőtér területe így $1963{,}5\ \text{m}^2$.

2253 A köríven nyugvó kerületi szög nagysága

a) 8°; *b)* 15,5°; *c)* 35°; *d)* 90°; *e)* 105°; *f)* 175°.

2254 A köríven nyugvó középponti szög nagysága

a) 20°; *b)* 70°; *c)* 180°; *d)* 300°; *e)* 320°; *f)* 350°.

2255 A köríven nyugvó középponti szöget α-val, a kerületi szöget β-val jelöltük.

a) $\alpha = 120°,\ \beta = 60°$; *b)* $\alpha = 216°,\ \beta = 108°$; *c)* $\alpha = 330°,\ \beta = 165°$;
d) $\alpha = 180°,\ \beta = 90°$; *e)* $\alpha = 270°,\ \beta = 135°$.

2256 A kerületi szög 70°-os, a középponti szög 140°-os.

2257 Ha a középponti szöget α, a kerületi szöget β jelöli, akkor

a) $\alpha = 53{,}33°,\ \beta = 26{,}67°$; *b)* $\alpha = 160°,\ \beta = 80°$.

2258 A keresett kerületi szög:

a) 172,5°; *b)* 161,5°; *c)* 155°.

2259 *a)* A háromszög szögei: 30°, 45°, 105°. A körívek hossza rendre: 15,71 cm, 23,56 cm, 54,98 cm.
b) A háromszög szögei: 10°, 70°, 100°. A körívek hossza rendre: 5,24 cm, 36,65 cm, 52,36 cm.
c) A háromszög szögei: 52,5°, 60°, 67,5°. A körívek hossza rendre: 27,49 cm, 31,42 cm, 35,34 cm.

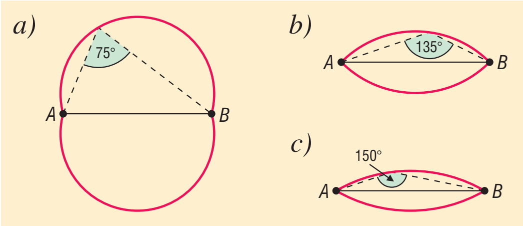
2260 A két érintő hajlásszöge:

a) 160°; *b)* 120°; *c)* 50°.

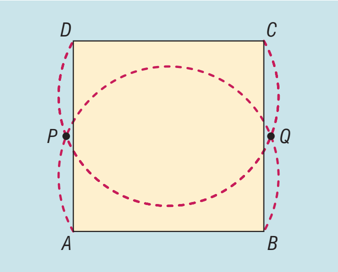
2261 Az ABC háromszög szögei: 48°, 55°, 77°.



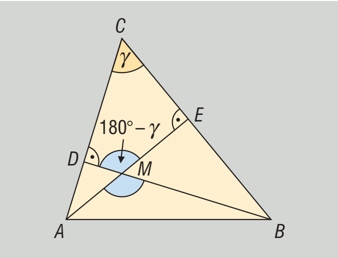
2262 Mindhárom esetben a szakasz adott szöghöz tartozó látószögköríveit kell megszerkeszteni. A köríveken belüli pontokból a szakasz a megadott szögnél nagyobb, a köríveken kívüli pontokból pedig kisebb szögben látszik.



2263 Szerkesszünk a négyzet AB, valamint CD oldalaira befelé 60°-os látószögköríveket. A két körív P és Q metszéspontjaiból az AB, valamint a CD oldal is 60°-os szög alatt látszik. Hasonló eljárással szerkeszthető meg az a két pont, amelyekből a négyzet BC és DA oldalai látszanak 60°-os szögben.



2264 Az A csúcsból induló magasság talppontja legyen E, a B csúcsból indulóé D. A $CDME$ négyszög két szemközti szöge 90°-os, ezért a másik két szögének összege 180°, így $DME\sphericalangle = 180° - \gamma$. Mivel az $AMB\sphericalangle$, és a $DME\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért megegyeznek, ami igazolja, hogy az M pont illeszkedik a szóban forgó látószögkörívre. Az állítás igaz derékszögű és tompaszögű háromszögekre is.



2265 Az n oldalú szabályos sokszöget a középpontjából a csúcsokig tartó szakaszok n egyenlő szárú, egybevágó háromszögre bontják. Mindegyik háromszögben a középpontnál kialakuló szög $\frac{360°}{n}$, ami bizonyítja az állítás helyességét.

2266 *a)* A megadott arányú szögek lehetnek egy húrnégyszög szögei. Egy ilyen húrnégyszögben a szögek: 67,5°, 112,5°, 90°, 90°.

b) A megadott arányú szögek nem lehetnek húrnégyszög szögei, mivel nincs köztük két olyan, amelyeknek az összege megegyezne a másik kettő összegével.

2267 A húrnégyszög szögei az egyes esetekben:

a) 90°, 60°, 90°, 120°; *b)* 45°, 30°, 135°, 150°; *c)* 25°, 100°, 155°, 80°.

2268 A húrnégyszög szögei az egyes esetekben:

a) 145°, 60°, 35°, 120°; *b)* 110°, 115°, 70°, 65°; *c)* 95°, 25°, 85°, 155°.

2269 Ha a húrnégyszög egy belső szöge α, akkor szemközti szöge $180° - \alpha$, így annak külső szöge $180° - (180° - \alpha) = \alpha$.

2270 Válasszuk ki a húrnégyszög egy oldalát! A négyszög köré írt kör középpontja az oldal két végpontjától egyenlő távolságra van; ez a távolság éppen a kör sugarával egyenlő. A két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok illeszkednek a két pont közti szakasz felezőmerőlegesére, ezért a kör középpontja rajta van a kiválasztott oldal felezőmerőlegesén. Mivel az elmondottak a négyszög bármelyik oldalára érvényesek, ezért az oldalfelező merőlegesek valóban egy pontban, épp a négyszög köré írható kör középpontjában metszik egymást.



2271 A háromszög két csúcsa, valamint az egyik magasságvonal talppontja olyan derékszögű háromszöget határoz meg, amelynek a háromszög egyik oldala az átfogója. Ekkor Thalész tételének megfordítása alapján a magasságvonal talppontja illeszkedik a háromszög megfelelő oldala, mint átmérő fölé emelt körre.

Ugyanez természetesen érvényes a másik magasságvonal talppontjára is, így a szóban forgó négy pont valóban egy körön helyezkedik el, és ezért húrnégyszöget határoz meg. A négyszög köré írt kör középpontja a háromszög megfelelő oldalának középpontjába esik.

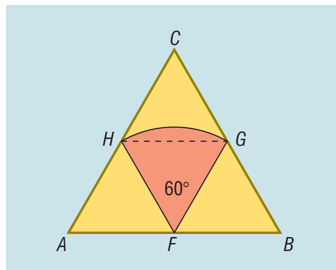
2272 A feladat szövege alapján Budapest a Föld középpontjából 47,5°-os szög alatt látszik az Egyenlítőhöz képest. Így fővárosunk Egyenlítőtől való távolsága:

$$i=\frac{2\cdot 6370\cdot \pi\cdot 47{,}5^\circ}{360^\circ}\approx 5281\,\text{km}.$$

2273 A Ráktérítő és a Baktérítő a Föld középpontjából külön-külön 23°27' = 23,45° alatt látszik az Egyenlítőhöz képest. Ebből következik, hogy távolságuk:

$$i=\frac{2\cdot 6370\cdot \pi\cdot 46{,}9^\circ}{360^\circ}\approx 5214\,\text{km}.$$

2274 Az ábra jelöléseinek megfelelően a gazda az ABC szabályos háromszög AB oldalának F felezőpontjához kötötte ki a jószágot. A kecske által lelegelhető területet két szabályos háromszögre (AFH, valamint FBG háromszögek), valamint egy 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikkre lehet felbontani.



A háromszög középvonalai a háromszöget négy egybevágó kis háromszögre bontják, ezért az AFH, valamint FBG háromszögek területe megegyezik, és együtt éppen az ABC háromszög területének felét adják, vagyis:

$$T_{AFH}+T_{FBG}=\frac{T_{ABC}}{2}=\frac{14\cdot 14\cdot \sqrt{3}}{8}\approx 42{,}44\text{ m}^2.$$

Az FG és FH sugarak által határolt 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikk területe:

$$T_{\text{körcikk}}=\frac{7^2\cdot \pi\cdot 60^\circ}{360^\circ}\approx 25{,}66\text{ m}^2,$$

így a kecske összesen 68,10 m^2 területen legelhet.

2275 Mivel bármely szabályos sokszög köré kör írható, ezért a feladat állítása egyszerű következménye a kerületi szögek tételének. A keresett szög nagysága minden esetben annak a szögnek a fele, amekkora szögben a szabályos sokszög oldala a sokszög középpontjából látszik. A megoldás az egyes esetekben:

a) 36°; *b)* 30°; *c)* 15°; *d)* $\frac{360^\circ}{2\cdot n}$.

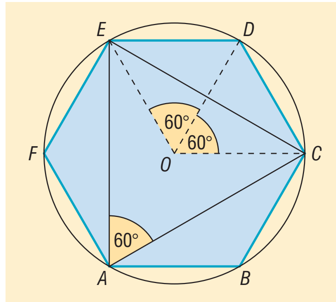
2276 A 2275. feladatban kiszámítottuk, hogy a hosszabb körív pontjaiból mekkora szög alatt látszik a szabályos sokszög egy oldala. A rövidebb körív pontjaihoz a kiszámított szögek kiegészítő szöge tartozik, ezért a megoldás az egyes esetekben:

a) 144°; *b)* 150°;

c) 165°; *d)* $180^\circ-\frac{360^\circ}{2\cdot n}=\frac{(n-1)\cdot 180^\circ}{n}$.



2277 Húzzuk be az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC, CE és EA átlóit. Szimmetria okokból a kapott háromszög összes oldala ugyanakkora szögben látszik a hatszög O középpontjából, és így ez a szög csak 120° lehet. Erről úgy is meggyőződhetünk, hogy meghúzzuk az OE, OD, OC sugarakat, és a kialakult OED és ODC szabályos háromszögekre hivatkozunk.

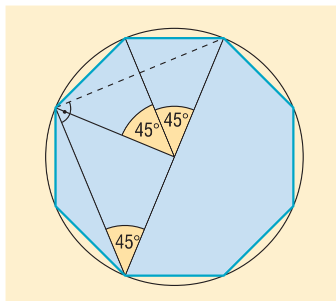


Az elmondottakból az is következik, hogy az ACE háromszög szabályos. Ezt azonnal beláthatjuk a kerületi és középponti szögek tételéből, hiszen a rövidebb EC köríven 120°-os középponti szög nyugszik, ezért a hozzá tartozó kerületi szögre igaz: $EAC\sphericalangle = 60°$.

Hasonlóan látható be, hogy a háromszög C és E csúcsánál szintén 60°-os szögek vannak.

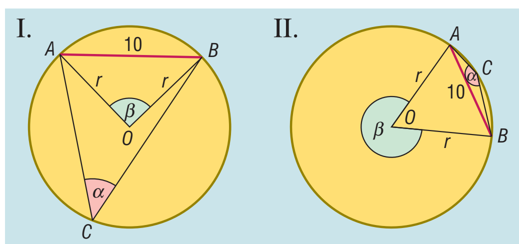
Megjegyezzük, hogy a feladat állítása a kerületi és középponti szögek tételére történő hivatkozás nélkül a következő módon is igazolható. Forgassuk el az ECD háromszöget az O pont körül –120°-kal; ekkor az ED oldal képe a CB szakasz, DC oldal képe a BA szakasz, és így természetesen az EC oldal a CA oldalba megy át. Mivel a forgatás a szakaszok hosszát megőrzi, ezért $EC = CA$. Hasonló módszerrel igazolható, hogy $EC = AE$ is teljesül, azaz az ACE háromszög valóban szabályos.

2278 Tekintsük a szabályos nyolcszög köré írható kört. A nyolcszög leghosszabb és legrövidebb átlója által meghatározott szög a kör egy olyan kerületi szögeként is felfogható, amelyhez tartozó köríven 90°-os középponti szög nyugszik. Ekkor viszont a két átló által bezárt szög 45°.



Megjegyezzük, hogy a két átló által bezárt szög a kerületi és középponti szögek tételének alkalmazása nélkül is kiszámolható. Ha ugyanis meghúzzuk a két átló nem közös végpontjait összekötő szakaszt (az ábrán szaggatottal jelöltük), akkor a nyolcszögben szintén egy legrövidebb átlót kapunk, és ezért az a két átlóval egyenlő szárú háromszöget alkot. Mivel a leghosszabb átló átmegy a kör középpontján, azaz a kör egy átmérője is egyben, ezért Thalész tételének megfordítása szerint a két rövidebb átló merőleges egymásra. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei 45°-osak.

2279 Az I. ábra jelöléseinek megfelelően legyen az AB húr hossza 10 cm, az AB köríven nyugvó kerületi szög α, a hozzá tartozó középponti szög pedig β. Az AOB háromszög egyenlő szárú, továbbá $\beta = 2 \cdot \alpha$.



a) Mivel $\beta = 60°$, ezért az AOB háromszög szabályos, és így a kör sugarának szintén 10 cm adódik.

b) Mivel $\beta = 90°$, ezért az AOB háromszög derékszögű, és így Pitagorasz tétele alapján:

$$r^2 + r^2 = 10^2 = 100.$$

A sugár hossza: $5 \cdot \sqrt{2}$ ($\approx 7{,}07$) cm.

c) A kerületi és középponti szögek helyzetét a II. ábra szemlélteti. Mivel $\beta = 300°$, ezért az AOB háromszög O csúcsánál 60°-os szög van, így a háromszög szabályos. A kör sugara ebben az esetben 10 cm.

2280 A húr két végpontja a kör középpontjával minden esetben egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek alapja éppen a húr, szárainak hossza pedig a kör r sugarával egyenlő.

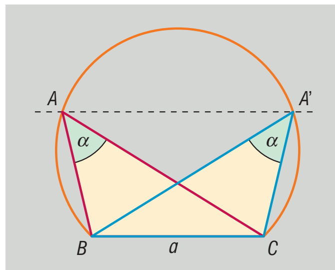
a) Ha a húr hossza r, akkor az egyenlő szárú háromszög szabályos is, így a húr a kör középpontjából 60°-os szögben látszik. A körvonal (az adott húr végpontjaitól különböző) pontjaiból a húr vagy 30°-os, vagy 150°-os szög alatt látszik, attól függően, hogy a hosszabb, vagy a rövidebb körív pontjáról van szó.

b) Ebben az esetben az egyenlő szárú háromszög szárai r, alapja pedig $r \cdot \sqrt{2}$ hosszúságúak. Észrevehető, hogy $r^2 + r^2 = \left(r \cdot \sqrt{2}\right)^2$, így Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű.

A húr a kör középpontjából 90°-os, a körvonal (az adott húr végpontjaitól különböző) pontjaiból 45°-os, vagy 135°-os szög alatt látszik, attól függően, hogy a hosszabb, vagy a rövidebb körív pontjáról van szó.

c) Az r sugarú körben elhelyezhető leghosszabb húr az átmérő, amelynek hossza éppen $2 \cdot r$. Ebből következik, hogy a húr a kör középpontjából 180°-os, a kör (az adott húr végpontjaitól különböző) pontjaiból pedig 90°-os szögben látszik.

2281 *a)* A szerkesztés lépései:

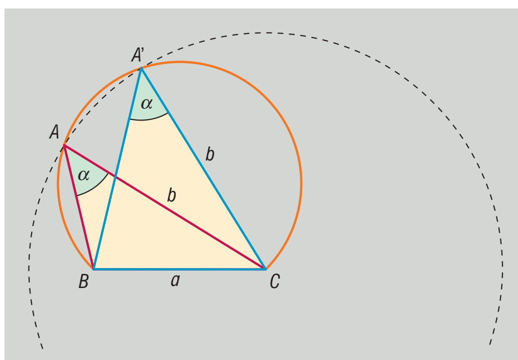


1. Az adott $BC = a$ oldal fölé α szögű látószögkörívet szerkesztünk; a háromszög A csúcsa a körvonalra illeszkedik.
2. Az a oldallal párhuzamos, attól m_a távolságra haladó egyenest szerkesztünk; az A csúcs illeszkedik az egyenesre.
3. Megjelöljük a látószögkörívet, valamint az a oldallal párhuzamos egyenes metszéspontjait (az ábrán A és A').
4. A csúcsokat összekötjük.

Megjegyzések: A látószögkörív és a BC-vel párhuzamos egyenes az adatok felvételétől függően 0, 1, esetleg 2 metszéspontot határozhat meg, ezért a feladatnak 0, 1, 2 megoldása lehet. Az ábrán látható elrendezés mellett két megoldás adódik, azonban a két megoldás egymás tükörképe a BC szakasz felezőmerőlegesére.

Ha az a szakasz α szögű látószögkörívét a szakasz másik „oldalára" szerkesztjük meg, akkor további 0, 1, 2 megoldás adódik, amelyek természetesen az imént kapott megoldások BC egyenesre vonatkozó tükörképei.

b) A szerkesztés lépései:



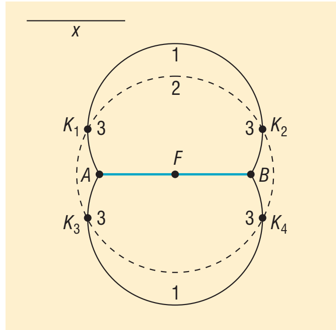
1. Az adott $BC = a$ oldal fölé α szögű látószögkörívet szerkesztünk; a háromszög A csúcsa a körvonalra illeszkedik.
2. C középpontú, b sugarú kört szerkesztünk; a háromszög A csúcsa illeszkedik a körvonalra.
3. Megjelöljük a látószögkörívet, valamint a 2. pontban szerkesztett kör metszéspontjait (az ábrán A és A').
4. A csúcsokat összekötjük.

Megjegyzések: A két körnek 0, 1, esetleg 2 közös pontja lehet az adatok felvételétől függően, így a megoldások száma is 0, 1, esetleg 2 lehet.

Ha a látószögkörívet a BC szakasz másik „oldalára" is megszerkesztjük, akkor további 0, 1, 2 megoldást kapunk, melyek a már megszerkesztett megoldások BC egyenesre vonatkozó tükörképei.

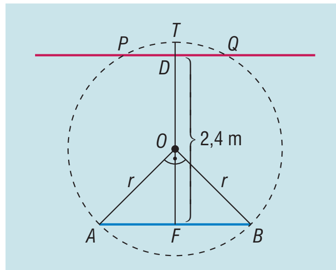


2282 A feltételek szerint a kincs helye a két fát összekötő AB szakasz 60°-os egyik látószögkörívén található (az ábrán 1-es jelöli). A feladat szövegében szereplő másik kalóz emlékképei alapján a kincs az AB szakasz F felezőpontjától ismert x távolságra van, amit ezúttal úgy is értelmezhetünk, hogy a kincs az F középpontú, x sugarú körön is rajta van (az ábrán 2-es jelöli). Az aranyládát ezért a két körvonal metszéspontjaiban kell keresni (az ábrán 3-as számmal jelöltük). A feladatnak 4, 2, esetleg kevésbé jó emlékezőképességgel megáldott kalózok esetén 0 megoldása lehet, attól függően, hogy a látószögkörívek hány pontban metszik az F középpontú, x sugarú kört.



2283 *a)* A feladat geometriai modellje:

Adott az AB szakasz, amelynek hossza 2 m. A szakasztól 2,4 méter távolságra párhuzamost húzunk. A feladat megoldása attól függ, hány közös pontja van a párhuzamosnak, valamint az AB szakaszhoz tartozó 45° szögű (egyik) látószögkörívének. Az ábrán a megfelelő látókör középpontját O-val jelöltük. Ekkor a kerületi és középponti szögek tétele alapján az ABO háromszög derékszögű és derékszöge az O csúcsnál van. Mivel az ABO háromszög egyben egyenlő szárú is ($AO = OB$, mert mindkettő a kör sugara), ezért ha a kör sugarát r jelöli, akkor a Pitagorasz-tétel szerint $r^2 + r^2 = 2^2$, azaz $r = \sqrt{2}$ m. Ha a látókörnek az AB szakasztól legtávolabbi pontját T jelöli, továbbá az AB szakasz felezőpontja F, akkor $FT = FO + OT = 1 + r = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$ m. Mivel $2{,}4 < 2{,}41$, így az AB-vel párhuzamos kötél metszi az FT szakaszt, amiből következik, hogy a kötél mentén két olyan pont van, amelyből a festmény 45°-os szög alatt látszik (az ábrán ezeket P és Q jelöli).



b) A kötelet a festménytől 2,41 m távolságra kell vezetni ahhoz, hogy a kötél mentén pontosan egy pontból látszódjon a festmény 45°-os szögben.

2284 A feltételek szerint a négyszög három szögét $3 \cdot x$, $5 \cdot x$, illetve $2 \cdot x$ alakban kereshetjük. A következő esetek lehetségesek:

1. A $3 \cdot x$, és az $5 \cdot x$ nagyságú szögek szemköztiek. Ekkor $3 \cdot x + 5 \cdot x = 180°$, amiből $x = 22{,}5°$. Ekkor a négyszög szögei: 67,5°, 112,5°, 45°, 135°.
2. A $3 \cdot x$, és a $2 \cdot x$ nagyságú szögek szemköztiek. Ekkor $3 \cdot x + 2 \cdot x = 180°$, amiből $x = 36°$. Ebben az esetben $5 \cdot x = 180°$ adódik, ami nem lehet a négyszög szöge, így a 2. eset nem valósulhat meg.
3. Az $5 \cdot x$, és a $2 \cdot x$ nagyságú szögek szemköztiek. Ekkor $5 \cdot x + 2 \cdot x = 180°$, amiből $x \approx 25{,}71°$, így a négyszög szögei: 77,14°, 128,57°, 51,43°, 102,86°.

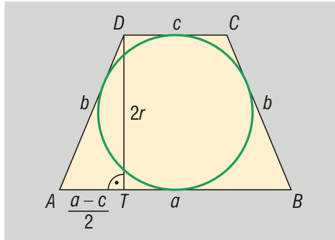
A feladatnak két megoldása van.

2285 Tegyük fel, hogy az $ABCD$ négyszög húrnégyszög. Ekkor az $ACB\sphericalangle$, valamint az $ADB\sphericalangle$ a négyszög köré írható körben az AB köríven nyugszik, és az ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek megegyeznek. Ebből adódik, hogy a húrnégyszög bármely oldala a másik két csúcsból ugyanakkora szög alatt látszik.

Fordítva: Tegyük fel, hogy az $ABCD$ négyszögben az AB oldal a másik két csúcsból ugyanakkora α szög alatt látszik. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a C és D csúcsok illeszkednek az AB szakasz fölé emelt egyik α szögű látókörívére. Nyugodtan elvethetjük, hogy az $ABCD$ négyszög hurkolt négyszög lenne, ezért C és D ugyanarra a látókörívre esnek. Ez azt is jelenti, hogy A, B, C és D ugyanazon körre illeszkednek, és így valóban húrnégyszöget alkotnak.



2286 Tekintsük az $ABCD$ húrtrapézt, amely egyben érintőtrapéz is; alapjait jelöljük a-val és c-vel, szárát b-vel. Jelölje továbbá a D csúcsból húzott magasságvonal talppontját T; ekkor nyilvánvalóan $AT=\frac{a-c}{2}$, továbbá $DT=2r$, ahol r a beírt kör sugara.



Az ADT derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján

$$b^2=(2r)^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2.$$

Mivel a négyszög érintőnégyszög is, ezért szemközti oldalainak összege megegyezik, azaz $b=\frac{a+c}{2}$, amit behelyettesítve a Pitagorasz-tételbe megkapjuk, hogy

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=(2r)^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2.$$

A kijelölt műveletek elvégzése, az egynemű tagok összevonása után adódik, hogy $(2r)^2=ac$, vagyis $2r=\sqrt{ac}$. A feladat adatait behelyettesítve $r=6$ cm adódik.

2287 *a)* Hamis. Gondoljunk arra, hogy a húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180°, így egy húrnégyszögben egyetlen szög sem lehet 180°-nál nagyobb, azaz konkáv.

b) Hamis. A négyzet, mint húrnégyszög átlója a négyszöget két derékszögű háromszögre bontja.

c) Igaz. A trapéz szárára illeszkedő két belső szögének összege 180°. Ha a trapéz húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege is 180°. Ebből következik, hogy a trapéz alapjain lévő két-két belső szög egyenlő, így az alapok felezőpontjait összekötő egyenesre tengelyesen szimmetrikus. Tehát szárai egyenlő hosszúak.

d) Hamis. A trapézok közül a paralelogrammákban a szárak egyenlők, mégsem feltétlenül húrnégyszögek.

e) Igaz. A paralelogrammában a szemközti szögek egyenlők, így összegük csak úgy lehet 180°, ha egyenként 90°-osak.

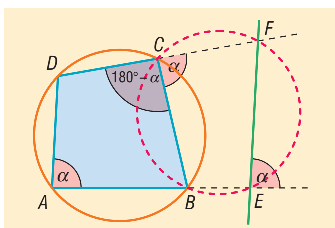
f) Igaz. Mivel a rombusz paralelogramma is, ezért az állítás azonnal adódik az *e)* részfeladat állításából.

g) Hamis. A négyzet húrnégyszög, tompaszöget mégsem tartalmaz.

h) Igaz. Ha a négyszög nem tartalmaz derékszöget, akkor a szemközti szögek összege csak úgy lehet 180°, ha közülük az egyik hegyesszög, a másik tompaszög. Ugyanez érvényes a másik szögpárra is.

2288 Kétféle elrendezést érdemes vizsgálni.

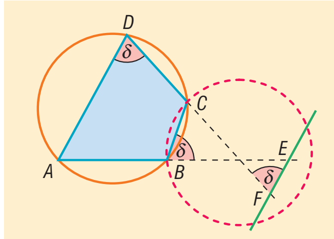
Az első esetben a D kezdőpontú félegyenes nem metszi az AE szakaszt. Ha az $ABCD$ négyszög A csúcsánál lévő szöget α jelöli, úgy az EF egyenes is α szöget zár be az AE félegyenessel, hiszen AD és EF párhuzamosak (egyállású szögek. Mivel az $ABCD$ négyszögről tudjuk, hogy húrnégyszög, ezért a C csúcsnál $180°-\alpha$ nagyságú szöge van, aminek külső szögére teljesül:



$$BCF\sphericalangle=180°-(180°-\alpha)=\alpha.$$

Az elmondottakból adódik, hogy a $BEFC$ négyszög C csúcsánál lévő belső szög ugyanakkora, mint a szemközti E csúcsánál lévő külső szög, így a szemközti belső szögek összege 180°, ezért a négyszög húrnégyszög.

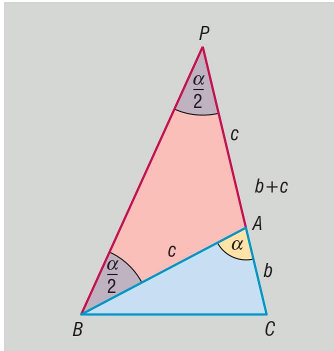
A második esetben a D kezdőpontú félegyenes metszi az AE szakaszt. Ebben az esetben $ADF\sphericalangle = DFE\sphericalangle = \delta$, hiszen váltószögek. Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, ezért a B csúcsnál lévő külső szöge megegyezik a D csúcsnál lévő belső szöggel, azaz $CBE\sphericalangle = \delta$. Ekkor viszont a CE szakasz az F és B pontokból ugyanakkora szög alatt látszik, így mindkettő illeszkedik a CE szakasz δ szögű látószögkörívére, azaz a C, E, B, F pontok egy körre illeszkednek.



Megjegyzés: A második esetben a B és F pontok a CE szakasznak ugyanazon partján vannak, ezért nem fordulhat elő, hogy a CE szakasz különböző látószögkörívére illeszkedjenek.

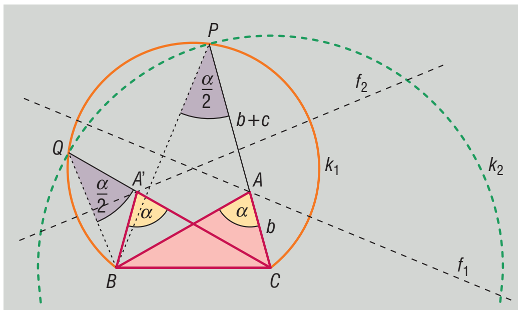
2289 *a)* Forgassuk el az ABC háromszög AB oldalát az A csúcs körül úgy, hogy az elforgatott szakasz illeszkedjen a CA oldal meghosszabbítására. Ha a B pont képét P jelöli, akkor a PBA háromszög egyenlő szárú, továbbá az A csúcsnál lévő külső szöge α.

Mivel a háromszög külső szöge a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, ezért a PBA háromszög alapján fekvő szögek $\frac{\alpha}{2}$ nagyságúak. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a P pont illeszkedik a BC szakasz $\frac{\alpha}{2}$ szögű valamelyik látószögkörívére.



A fenti megállapításokat figyelembe véve, a szerkesztés lépései a következők lehetnek.

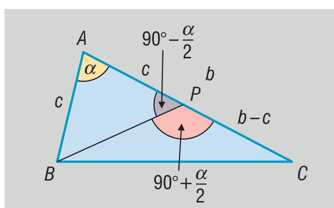
1. Az adott $a = BC$ szakasz fölé $\frac{\alpha}{2}$ szögű látószögkörívet szerkesztünk (k_1).
2. A C középpont körül adott $b + c$ sugarú kört szerkesztünk (k_2).
3. Megjelöljük az a szakaszhoz tartozó látószögkörív, valamint a C középpontú kör metszéspontjait (az ábrán P és Q).



4. Megszerkesztjük a PB és QB szakaszok felezőmerőlegesét (f_1, f_2).
5. Az ABC háromszög ismeretlen A csúcsát az imént szerkesztetett felezőmerőlegesek metszik ki a PC, illetve QC szakaszokból.

A feladatnak 0, 1, 2 megoldása lehet. Ha az adott a szakasz másik látószögkörívét is megszerkesztjük, akkor további 0, 1, 2 megoldást kapunk, amelyek az AB egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel adódnak a már megszerkesztett háromszög(ek)ből.

b) Ezúttal az AB oldalt az A csúcs körül úgy érdemes elforgatni, hogy az elforgatott szakasz illeszkedjen a háromszög AC oldalára ($AC > AB$). A B pont képét P-vel jelöltük az ábrán. Ekkor az ABP háromszög egyenlő szárú, amelyben a szárak α szöget zárnak be egymással, ezért az alapon fekvő szögek $90° - \frac{\alpha}{2}$, továbbá a P csúcsnál fekvő külső szöge $90° + \frac{\alpha}{2}$ nagyságú. Vegyük észre még, hogy $PC = b - c$.

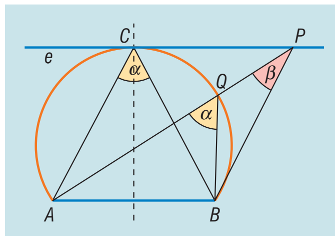


Ezek alapján a szerkesztés menete nagyon hasonló az *a)* részfeladatban ismertetett szerkesztéshez.

1. Az adott $a = BC$ szakaszhoz tartozó $90° + \frac{\alpha}{2}$ szögű egyik látószögkörívet megszerkesztjük.
2. Megszerkesztjük a C középpontú, adott $b - c$ sugarú kört.
3. Megjelöljük a BC szakaszhoz tartozó látószögkörívet, valamint a C középpontú kör megfelelő metszéspontját (P).
4. A BP szakasz felezőmerőlegese kimetszi a C kezdőpontú CP félegyenesből az A csúcsot.

Ebben az esetben csak 0 vagy 1 megoldás lehet.

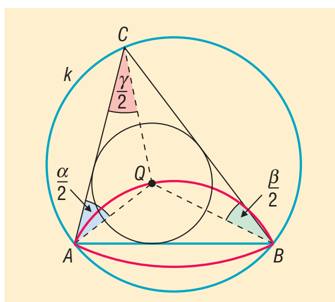
2290 A völgyhíd végpontjait A és B, a vele párhuzamos utat e jelöli az ábrán. Néhány konkrét eset vizsgálata után sejthető, hogy az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az e egyenesből azt a pontot, amelyből az AB szakasz a legnagyobb szögben látszik. Jelöljük ezt a pontot C-vel, az $ACB\sphericalangle$-et pedig α-val. Ekkor a kerületi szögek tétele alapján az AB völgyhíd az ABC háromszög köré írható kör C-t is tartalmazó AB körívének minden pontjából α szög alatt látszik.



Megmutatjuk, hogy az e egyenes C-től különböző tetszőleges P pontjából az AB szakasz α-nál kisebb szögben látható. Mivel a C csúcs az AB szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik, ezért az ABC háromszög egyenlő szárú, így köré írt körének középpontja az AB oldal felezőmerőlegesén található. Ugyanakkor az e és AB párhuzamosak, ezért a C csúcshoz tartozó sugár nemcsak az AB szakaszra, hanem az e egyenesre is merőleges (az e egyenes a köré írt kör C pontbeli érintője), vagyis a P pont szükségképpen a kör külső pontja. Kössük össze a P pontot az AB szakasz végpontjaival; az AP szakasz és a kör metszéspontját az ábrának megfelelően jelöljük Q-val. Mivel a Q pont a körvonal pontja, ezért korábbi megjegyzésünk alapján $AQB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \alpha$. Vegyük észre, hogy az $AQB\sphericalangle$ a PQB háromszög külső szöge, ezért megegyezik a nem szomszédos belső szögek összegével, így $AQB\sphericalangle = QPB\sphericalangle + QBP\sphericalangle > QPB\sphericalangle = APB\sphericalangle$.

Az ábra jelöléseit használva tehát $\alpha > \beta$, ami egyben azt is jelenti, hogy az AB szakasz a C pontból nagyobb szög alatt látszik, mint a P pontból. Ezzel igazoltuk, hogy az e egyenes pontjai közül valóban a C pontból látható az AB szakasz a legnagyobb szög alatt.

2291 Az adott k kört az AB húr két körívre bontja. Bebizonyítjuk, hogy attól függően, hogy a C pont melyik körívén változik, az ABC háromszögbe írt kör Q középpontja illeszkedik az AB szakasz egy-egy megfelelő szögű látószögkörívére. Tegyük fel, hogy a C pont az ábra szerinti hosszabb AB körívén mozog. Ekkor az $ACB\sphericalangle$ a C pont helyzetétől függetlenül állandó, amit γ-val jelöltünk. Az ABC háromszög másik két szöge természetesen már függ a C pont aktuális helyzetétől. Ha e szögeket α és β jelöli, akkor figyelembe véve, hogy a Q pont az ABC háromszög szögfelezőinek metszéspontja azt kapjuk, hogy $CAQ\sphericalangle = QAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, továbbá $CBQ\sphericalangle = QBA\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$.



Mivel az ABQ háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért:

$$AQB\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

A kapott szög a C pont helyzetétől független állandó, ezért a Q pont az AB szakasz egyik $90° + \frac{\gamma}{2}$ szögű látószögkörívén mozog.



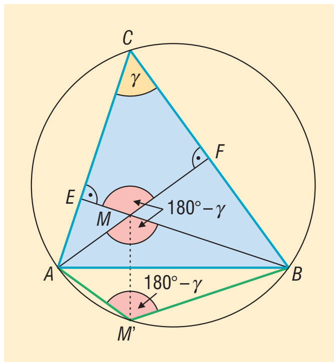
Ha a C pont a k kör másik AB körívén mozog, akkor az $ACB\sphericalangle = 180° - \gamma$, és így az

$$AQB\sphericalangle = 90° + \frac{180° - \gamma}{2} = 180° - \frac{\gamma}{2},$$

ami mutatja, hogy a Q pont az AB szakasz megfelelő $180° - \frac{\gamma}{2}$ szögű látószögkörívére esik.

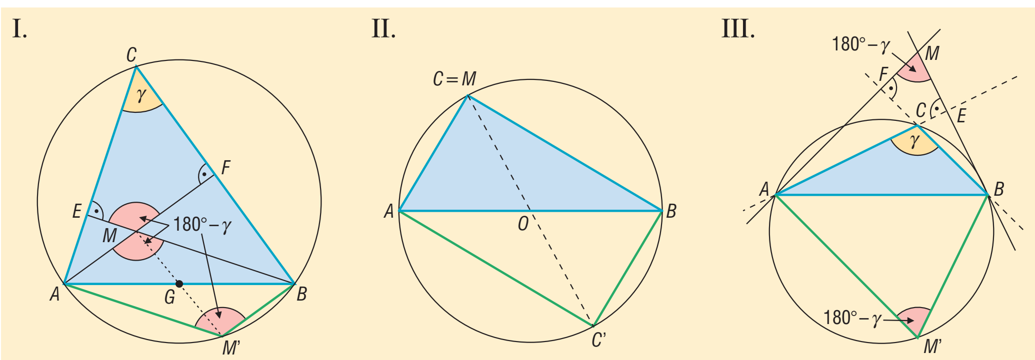
Megjegyzés: Az A és B pontok nem tartoznak a mértani helyhez. A fenti látószögkörívek minden más pontja a mértani hely része, ugyanis egy rögzített Q ponthoz tartozó C pontot az AQB háromszög AQ, illetve BQ oldalára felmért $QAB\sphericalangle$, illetve $QBA\sphericalangle$ szárai metszik ki egymásból.

2292 *a)* Tekintsük az ábra jelöléseit: az ABC háromszög magasságpontja M, az AB egyenesre vonatkozó tükörképe M', az A és B csúcsból induló magasságvonalak talppontjai F és E, a háromszög C csúcsánál lévő szöge γ.



Az $EMFC$ négyszög húrnégyszög, mivel két szemközti szöge 90°-os, ezért $EMF\sphericalangle = 180° - \gamma$. Mivel az $AMB\sphericalangle$ és az $EMF\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért $AMB\sphericalangle = 180° - \gamma$ is teljesül. Ha nemcsak a magasságpontot, hanem az AMB háromszöget is tükrözzük az AB egyenesre, akkor tükörképként az $AM'B$ háromszöget kapjuk, hiszen a tükrözés során a tengely A és B pontja helyben marad. A tengelyes tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt az $AM'B\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 180° - \gamma$. Ekkor viszont az $AM'BC$ négyszögben a C és M' csúcsoknál lévő szögek összege 180°, amiből következik, hogy a négyszög csúcsai egy körre illeszkednek. Ez a kör tartalmazza az A, B, C pontokat, azaz szükségképpen egybeesik az ABC háromszög köré írt körrel. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

b) Az állítás az *a)* részfeladat állításához hasonló módszerrel bizonyítható. Ha az M pontot ezúttal az AB oldal G felezőpontjára tükrözzük (I.), akkor a tükörképként kapott M' pont az A, B, M pontokkal paralelogrammát feszít ki, amelyben a szemközti szögek természetesen egyenlők, így $AM'B\sphericalangle = 180° - \gamma$, ami ismét igazolja, hogy az M' pont illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre.

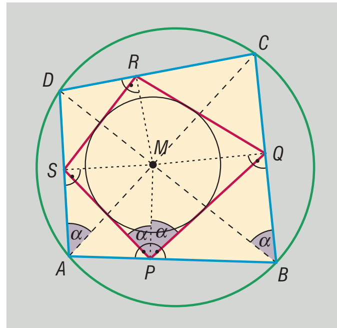


Az állítások derékszögű, illetve tompaszögű háromszögre is érvényben maradnak. A derékszögű háromszög esetében (II. ábra) a magasságpont egybeesik a derékszögű csúccsal (C-vel), a tükörképe (C') pedig szintén derékszögű háromszöget alkot az átfogó két végpontjával, így az állítás Thalész tételének megfordításából azonnal adódik. Az ábra az oldalfelező pontra vonatkozó állítást szemlélteti.

Tompaszögű háromszög esetén (III. ábra) az A és B csúcsokból induló magasságvonalak talppontjai (az ábrán E és F) a háromszög oldalain kívülre esnek csakúgy, mint az M magasságpont. Az $EMFC$ négyszögben a C csúcsnál lévő szög csúcsszöge az ABC háromszög γ szögének,

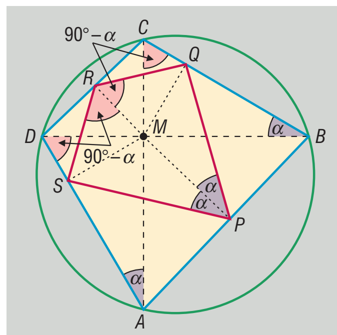
ezért egyenlő vele. Mivel a szóban forgó négyszög húrnégyszög, ezért az M csúcsnál lévő szöge $180° - \gamma$, amiből a már szokásos gondolatmenettel belátható, hogy $AM'B\sphericalangle = 180° - \gamma$ ezúttal is teljesül. Ekkor viszont az $AM'BC$ négyszög ismét húrnégyszög, azaz az M' pont illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre. Az oldalfelező pontra vonatkozó tükörképről hasonló módon látható be ugyanez a tulajdonság.

2293 *a)* Készítsünk ábrát, majd keressünk húrnégyszögeket a kialakult ábrában. Az $APMS$ négyszögben a P és S csúcsoknál derékszögek vannak, ezért húrnégyszög, amiből következik, hogy $SAM\sphericalangle = SPM\sphericalangle = \alpha$ (a köré írt körben ugyanazon a köríven nyugvó kerületi szögek). Ha az $SAM\sphericalangle$ szárait meghosszabbítjuk, akkor a vele megegyező nagyságú $DAC\sphericalangle$-et kapjuk, ezért $DAC\sphericalangle = \alpha$ is teljesül. Mivel az $ABCD$ húrnégyszög köré írható körben a $DAC\sphericalangle$ a DC íven nyugvó kerületi szög csakúgy, mint a $DBC\sphericalangle$, ezért $DBC\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \alpha$. Vegyük még észre, hogy a $BPMQ$ négyszög is húrnégyszög, amit ugyanúgy indokolhatunk, amint azt az $APMS$ négyszögnél tettük. A négyszög köré írt körben az $MPQ\sphericalangle$ és $MBQ\sphericalangle$ szögek ugyanazon az MQ köríven nyugvó kerületi szögek, ezért $MPQ\sphericalangle = MBQ\sphericalangle = DBC\sphericalangle = \alpha$. Eddigi eredményeinket összefoglalva láthatjuk, hogy $SPM\sphericalangle = QPM\sphericalangle = \alpha$, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy az M pont illeszkedik a $PQRS$ négyszög P csúcsánál lévő szögfelezőjére. Ehhez hasonlóan igazolható, hogy az M pont a négyszög összes szögfelezőjére illeszkedik, azaz a $PQRS$ négyszög valóban érintőnégyszög, amelyben a beírható kör középpontja egybeesik az $ABCD$ négyszög átlóinak M metszéspontjával.



b) Az *a)* részfeladat eredményei alapján az ábrán α-val jelölt szögek mind megegyeznek. Mivel a négyszög átlói ezúttal merőlegesek egymásra, ezért $ADM\sphericalangle = BCM\sphericalangle = 90° - \alpha$. Vegyük észre, hogy az $SMRD$ négyszög is húrnégyszög (az R és S csúcsoknál derékszögek vannak a pontok származtatása révén), ezért a köré írt körben az SM köríven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, azaz $SDM\sphericalangle = SRM\sphericalangle = 90° - \alpha$.

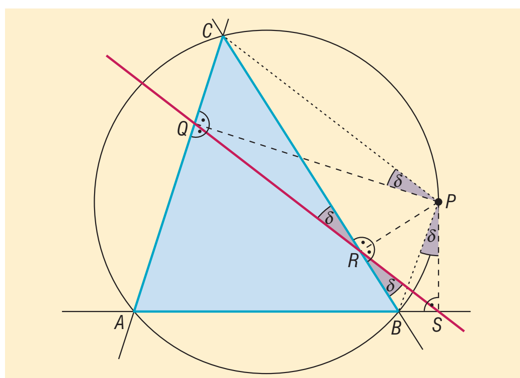
Ugyanígy az $RMQC$ húrnégyszögben: az MQ köríven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, azaz $MRQ\sphericalangle = MCQ\sphericalangle = 90° - \alpha$. Tekintsük most a $PQRS$ négyszöget: a P csúcsnál lévő szöge $2 \cdot \alpha$, az R csúcsnál lévő szöge $2 \cdot (90° - \alpha) = 180° - 2 \cdot \alpha$. Mivel a szemközti szögek összege 180°, ezért a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján a $PQRS$ négyszög húrnégyszög.



2294 Az ABC háromszög köré írt körének P pontját merőlegesen vetítve a háromszög oldalegyeneseire, az ábrának megfelelő jelölésekkel a Q, R, S pontokhoz jutunk. Az ábra „hemzseg” a húrnégyszögektől, amelyek közül először elemezzük az $ABPC$ négyszöget. A húrnégyszögek ismert tulajdonsága alapján a $CPB\sphericalangle = 180° - CAB\sphericalangle$. Az $ASPQ$ négyszögben az S és Q szemközti csúcsoknál derékszögek vannak, ezért szintén húrnégyszög, így:

$$QPS\sphericalangle = 180° - QAS\sphericalangle = 180° - CAB\sphericalangle.$$

Az elmondottak alapján tehát $CPB\sphericalangle = QPS\sphericalangle$.



Ha a fenti egyenlőség két oldalán álló szögekből a $QPB\sphericalangle$-et elvesszük, akkor a visszamaradó szögek is megegyeznek, azaz

$$CPB\sphericalangle - QPB\sphericalangle = QPS\sphericalangle - QPB\sphericalangle,$$
$$CPQ\sphericalangle = BPS\sphericalangle = \delta.$$

Az ábra további húrnégyszöge a $BSPR$ négyszög, hiszen S és R csúcsainál derékszögek vannak. A négyszög köré írt körében a BS köríven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, azaz

$$BRS\sphericalangle = BPS\sphericalangle = \delta. \qquad (1)$$

Végül szintén húrnégyszög a $CQRP$ négyszög, hiszen a CP szakasz a Q és R pontokból egyaránt 90°-os szög alatt látszik, így mindkét pont illeszkedik a CP szakasz Thalész-körére. A Thalész-kör QC körívén nyugvó kerületi szögek megegyeznek, ezért:

$$QRC\sphericalangle = QPC\sphericalangle = \delta. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőségek összehasonlítása után láthatjuk, hogy

$$BRS\sphericalangle = QRC\sphericalangle = \delta,$$

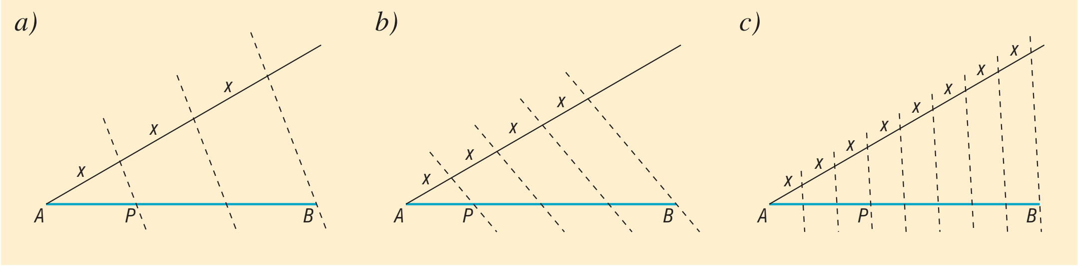
ami azt is jelenti, hogy az RS egyenes és az RQ egyenes egyaránt δ nagyságú szöget zár be a BC egyenessel, ami csak úgy képzelhető el, hogy a Q, R, S pontok egy egyenesre illeszkednek.

Párhuzamos szelők és párhuzamos szelőszakaszok tétele, szögfelezőtétel – megoldások

2295 A kitöltött táblázat:

a	b	c	d	x	y
5 cm	4 cm	3 cm	2,4 cm	7 cm	12,6 cm
2 cm	2,5 cm	3 cm	3,75 cm	4 cm	9 cm
3 cm	6 cm	2 cm	4 cm	$\frac{8}{3}$ cm	8 cm

2296 A szerkesztések a párhuzamos szelők tétele alapján könnyen elvégezhetők. A szerkesztési lépések az ábrákról leolvashatók.

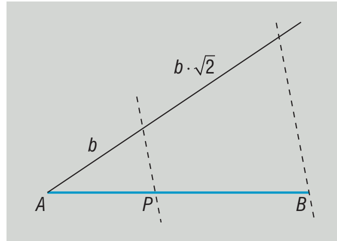


2297 Az adott szakaszt a párhuzamos szelők tétele alapján három egyenlő részre osztjuk, így megkapjuk a szabályos háromszög oldalának hosszát.

2298 Az adott szakaszt felosztjuk $2:3:4$ arányban; a kialakuló szakaszok a szerkesztendő háromszög oldalai lesznek. A három oldal ismeretében a háromszög már könnyen szerkeszthető.



2299 Szerkesszünk egy tetszőleges oldalú négyzetet, majd szerkesszük meg az átlóját; ha az oldal hossza b, akkor átlója $b \cdot \sqrt{2}$. A felosztani kívánt AB szakasz A kezdőpontjából induló félegyenesre mérjük fel a négyzet oldalát, majd átlóját. A párhuzamos szelők tétele alapján szerkeszthető a megfelelő osztópont. (➡)



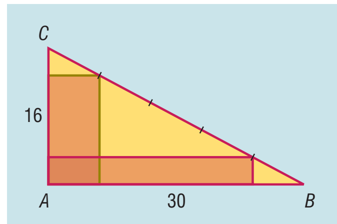
2300 A trapéz kiegészítő háromszögének oldalai 6 cm, 4,67 cm, 4,67 cm hosszúak.

2301 A trapéz szárainak hossza: 2,29 cm, 6,87 cm.

2302 A trapéz alapjainak hossza: $CD = 14$ cm és $AB = 18$ cm.

2303 A DE egyenes a BC oldalt $1:3$ arányban osztja.

2304 Az ábra segítségével is meggyőződhetünk arról, hogy a feladat feltételeinek két téglalap tesz eleget. Az egyik téglalap oldalai 6 cm és 12,8 cm, így területe 76,8 cm^2. A másik téglalap oldalai 3,2 cm és 24 cm, így területe szintén 76,8 cm^2. (➡)



2305 A háromszög alapjához 12 cm hosszú magasság tartozik. A szögfelezőtétel alapján a magasságot az alapon fekvő szög szögfelezője $5:13$ arányban, 8,67 cm és 3,33 cm hosszú részekre osztja.

2306 A háromszög átfogója $10 \cdot \sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm hosszúságú.
A szögfelezőtétel alapján a szögfelező a szemközti, 10 cm hosszú befogót $1 : \sqrt{2}$ arányban osztja. A derékszögű csúcshoz közelebbi szakasz hossza:

$$\frac{10}{1+\sqrt{2}} \approx 4{,}14 \text{ cm},$$

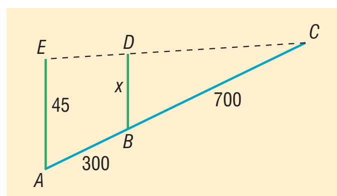
a másiké pedig:

$$\frac{10 \cdot \sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \approx 5{,}86 \text{ cm}.$$

2307 A 45 méteres fa helyét A, az ismeretlen, x magasságúét B, a hegytetőt C jelöli. Ekkor $AB = 300$ méter, és mivel Barnabás fél óra alatt 1000 m utat tesz meg, ezért $BC = 700$ m. A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján:

$$\frac{700}{1000} = \frac{x}{45}, \text{ amiből } x = 31{,}5 \text{ m}.$$

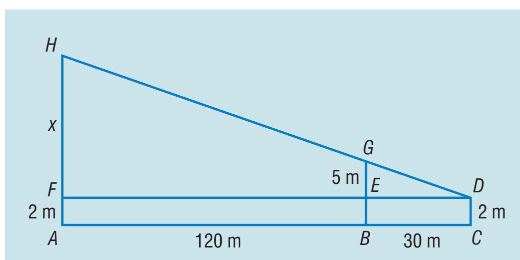
A második fa magassága 31,5 méter.



2308 A feladat geometriai modellje az ábrán látható. AH jelöli az ismeretlen magasságú létesítményt, BG a 7 méter magas fát, és D azt a pontot, ahonnan a fa és az ipari létesítmény teteje egy vonalban látszik. A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva az $FDH\sphericalangle$-re kapjuk, hogy:

$$\frac{x}{5} = \frac{150}{30} \quad \Rightarrow \quad x = 25.$$

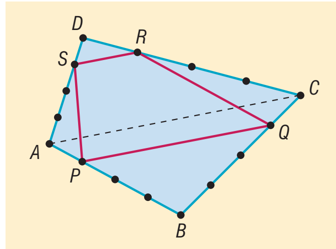
Az ipari létesítmény magassága tehát 27 méter.



2309 *a)* Megmutatjuk, hogy SR és PQ párhuzamosak az AC átlóval. Tekintsük ehhez az $ADC\sphericalangle$-et, amelynek szárait az SR és AC egyenesek úgy metszik, hogy a szárakból kimetszett szakaszok arányaira:

$$\frac{DS}{DA}=\frac{DR}{DC}=\frac{1}{4},$$

és így a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján SR és AC valóban párhuzamosak.



Hasonlóan láthatjuk, hogy az $ABC\sphericalangle$ száraiból PQ és AC olyan szakaszokat metszenek ki, amelyekre igaz:

$$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}=\frac{3}{4},$$

aminek következtében PQ és AC szintén párhuzamosak. Ez azt jelenti, hogy PQ és SR ugyanazzal az AC átlóval párhuzamosak, ami csak úgy lehetséges, ha egymással is párhuzamosak, és ez igazolja, hogy $PQRS$ valóban trapéz.

b) A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazzuk az $ADC\sphericalangle$-re, majd az $ABC\sphericalangle$-re:

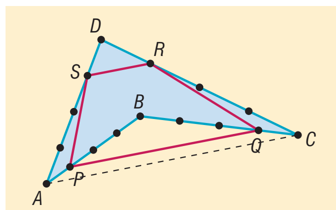
$$\frac{SR}{AC}=\frac{DS}{DA}=\frac{1}{4},$$

valamint

$$\frac{PQ}{AC}=\frac{BP}{BA}=\frac{3}{4}.$$

A feltételek szerint $AC = 20$ cm, amit az előző két egyenlőség bal oldalába behelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve adódik, hogy $SR = 5$ cm, $PQ = 15$ cm.

c) Az *a)* részfeladat állítása konkáv négyszögre is érvényes, amint azt az ábra is szemlélteti. A bizonyítás ugyanúgy történhet, mint a konvex esetben.

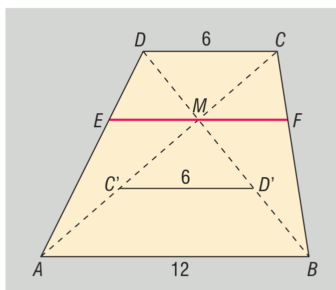


2310 *a)* Tükrözzük az $ABCD$ trapéz rövidebb (CD) alapját az átlók M metszéspontjára; a tükörképet jelölje $C'D'$. Mivel $C'D'$ párhuzamos az AB alappal, továbbá hossza az AB alap hosszának fele, ezért $C'D'$ az ABM háromszög AB-vel párhuzamos középvonala, így C' felezi az AM, és D' a BM szakaszt. A tükrözés a távolságtartó, ezért $C'M = CM$, vagyis C' és M a CA szakasz harmadolópontjai, így látható, hogy M a CA átlót $1:2$ arányban osztja. Ugyanígy belátható, hogy M a DB átlót is harmadolja.

b) Ha az M ponton átmenő, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenes a szárakat az ábrának megfelelően az E és F pontokban metszi, akkor a párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva a $DAC\sphericalangle$-re, valamint a $DBC\sphericalangle$-re:

$$\frac{EM}{DC}=\frac{AM}{AC}=\frac{2}{3},\quad \frac{MF}{DC}=\frac{BM}{BD}=\frac{2}{3}.$$

Az ismert $DC = 6$ cm-t behelyettesítve, valamint a számolásokat elvégezve $EM = MF = 4$ cm adódik, vagyis az EF szakasz hossza 8 cm.

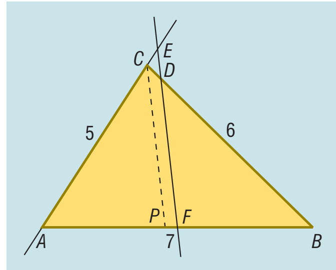


2311 *a)* Jelöljük a C-ből induló szögfelező AB oldalra illeszkedő pontját P-vel. A szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{5}{6},$$

továbbá felhasználva, hogy $PB=7-AP$, egyszerű számolással kapjuk, hogy:

$$AP=\frac{35}{11}\approx 3{,}18\text{ cm, valamint } PB=\frac{42}{11}\approx 3{,}82\text{ cm.}$$



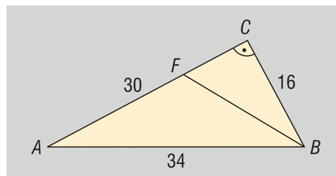
b) Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $PBC\sphericalangle$-re:

$$\frac{BD}{BC}=\frac{BF}{PB}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{42}{11}}=\frac{11}{12},$$

amiből a $BC=6$ cm miatt $BD=\frac{11}{2}=5{,}5$ cm.

Hasonló módszerrel számolható, hogy $AE=\frac{11}{2}=5{,}5$ cm szintén teljesül.

2312 *a)* A feltételek szerint a háromszög befogóinak hossza $15\cdot x$, illetve $8\cdot x$, az AB átfogó hossza 34 cm. Ekkor Pitagorasz tétele alapján $(15\cdot x)^2+(8\cdot x)^2=34^2$, amiből $x=2$ adódik. A háromszög befogói tehát $AC=30$ cm, illetve $BC=16$ cm. Ha a B csúcsból induló szögfelező az AC befogót az F pontban metszi, akkor a szögfelezőtétel alapján:



$$\frac{FC}{30-FC}=\frac{16}{34},$$

amiből FC-re 9,6 cm adódik. Az FB szögfelező hossza a BFC derékszögű háromszögből számolható:

$$BF^2=FC^2+BC^2=9{,}6^2+16^2,\quad \text{amiből}\quad BF=18{,}66\text{ cm.}$$

b) A háromszögbe írható kör középpontja a szögfelezők O metszéspontja. Az ábra jelöléseit követve legyen a C csúcsból induló magasságvonal talppontja P, a szögfelezőé G, a beírt kör az AB oldalt érintse T pontban. Előbb kiszámoljuk a beírt kör r sugarát, valamint a háromszög átfogójához tartozó m magasságát. Mindkettő a háromszög területét felhasználva számolható. Mivel $t=r\cdot s$, ahol s a háromszög kerületének fele, ezért:

$$\frac{16\cdot 30}{2}=r\cdot\frac{16+30+34}{2},\quad r=6\text{ cm.}$$

Másrészt a háromszög területe az oldal és a hozzá tartozó magasság segítségével:

$$\frac{16\cdot 30}{2}=\frac{34\cdot m}{2},\quad \text{azaz } m=\frac{240}{17}\approx 14{,}12\text{ cm.}$$

Ezután kiszámoljuk a GCP háromszög ismeretlen oldalainak hosszát. A szögfelezőtétel alapján

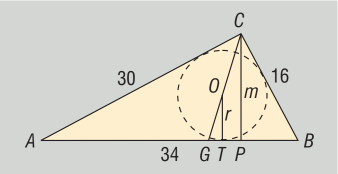
$$\frac{GB}{34-GB}=\frac{16}{30},\quad GB=\frac{272}{23}\approx 11{,}83\text{ cm.}$$

A BCP derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével a PB kiszámolható: $PB=7{,}53$ cm. Ekkor viszont $GP=GB-PB=4{,}30$ cm, és végül

$$GC=\sqrt{GP^2+m^2}=14{,}76\text{ cm.}$$



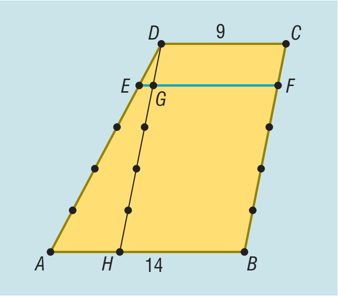
Az OC szakasz hossza ezek után már viszonylag könnyedén számolható. Mivel OT és CP párhuzamosak, ezért a $CGP\sphericalangle$-re alkalmazható a párhuzamos szelőszakaszok tétele:



$$\frac{r}{m} = \frac{GO}{GC}, \quad \frac{6}{14{,}12} = \frac{14{,}76 - OC}{14{,}76}, \quad OC \approx 8{,}49 \text{ cm}.$$

A háromszög beírható körének középpontja a derékszögű csúcstól körülbelül 8,49 cm távolságra található.

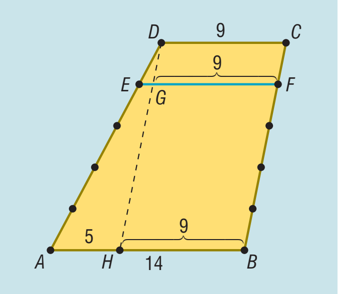
2313 *a)* Húzzunk párhuzamost a trapéz D csúcsán át a BC szárral; a párhuzamos az AB alapot az ábrának megfelelően a H pontban metszi. Ekkor $DHBC$ négyszög paralelogramma, így $HD = BC$. Jelöljük a DH szakasz D-hez legközelebb eső ötödölőpontját G-vel. Ha az AD szár D-hez legközelebbi ötödölőpontja E, akkor



$$\frac{DE}{DA} = \frac{DG}{DH} = \frac{1}{5},$$

és így a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt az EG egyenes párhuzamos az AB alappal. Megmutatjuk, hogy ha a BC szár C-hez legközelebb eső ötödölőpontja F, akkor az F pont illeszkedik az EG egyenesre, amiből a feladat állítása már következik. Valóban, mivel $DG = CF$ (hiszen mindkettő hossza a BC szár egyötöd része), továbbá DG párhuzamos CF-fel, ezért a $DGFC$ négyszög paralelogramma, így GF párhuzamos DC-vel (és persze AB-vel is). Ekkor EG és GF is párhuzamos a trapéz alapjaival, ami csak úgy lehetséges, ha az E, G, F pontok egy egyenesre illeszkednek.

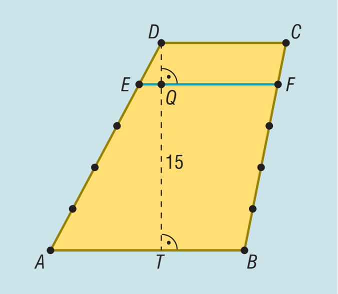
b) Az *a)* részfeladat eredményei alapján $DGFC$ négyszög paralelogramma, ezért $DC = GF = 9$ cm. Ugyanígy paralelogramma a $DHBC$ négyszög is, ezért $HB = 9$ cm, így $AH = 5$ cm. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ADH\sphericalangle$-re:



$$\frac{EG}{5} = \frac{DE}{DA} = \frac{1}{5},$$

amiből $EG = 1$ cm. Az EF szakasz hossza tehát 10 cm.

c) Húzzuk be a trapéz D csúcsából induló DT magasságát, amely az EF szakaszt Q-ban metszi. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az $ADT\sphericalangle$-re:



$$\frac{DQ}{15} = \frac{DE}{DA} = \frac{1}{5},$$

így $DQ = 3$ cm adódik. Ez egyben az $EFCD$ trapéz magassága is, így területe:

$$t = \frac{9+10}{2} \cdot 3 = 28{,}5 \text{ cm}^2.$$

Az $ABFE$ trapéz magassága az előzőekből adódóan 12 cm, így területe:

$$T = \frac{14+10}{2} \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2.$$



2314 Az AC átló hossza az ABC derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével számolható: $AC = 58$ m. Az ABC háromszögben alkalmazva a szögfelezőtételt

$$\frac{BE}{42 - BE} = \frac{40}{58}, \quad BE = \frac{120}{7} \approx 17{,}14 \text{ m adódik.}$$

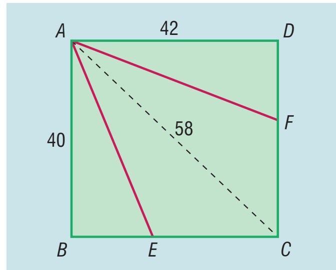
Az ABE derékszögű háromszög alakú kert területe ezek alapján:

$$t_{ABE} = \frac{40 \cdot \dfrac{120}{7}}{2} \approx 342{,}86 \text{ m}^2 .$$

Ehhez hasonlóan számolható az AFD kert területe is. Előbb az AFC háromszögben alkalmazzuk a szögfelezőtételt:

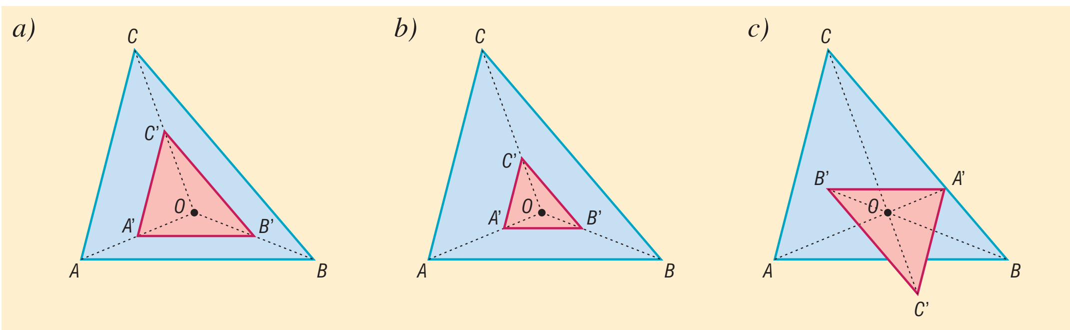
$$\frac{FD}{40 - FD} = \frac{42}{58} \quad \Rightarrow \quad FD = 16{,}8 \text{ m.}$$

Az AFD kert területe $t_{AFD} = 352{,}8$ m^2. Mivel az $ABCD$ kert területe 1680 m^2, ezért a legkisebb gyermek a kertnek körülbelül 20,4%-át, a középső 21%-át örökli. A legjobban a legidősebb gyermek jár, ő a kertnek csaknem 58,6%-át örökli.

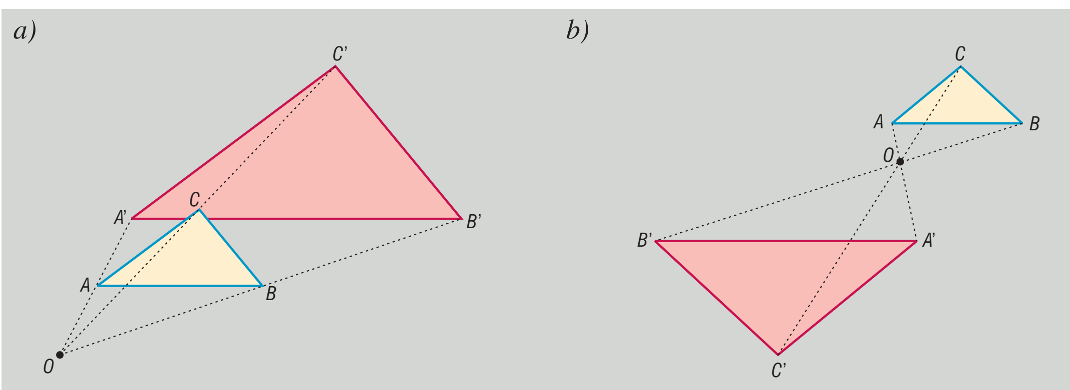


Hasonlósági transzformációk, alakzatok hasonlósága – megoldások

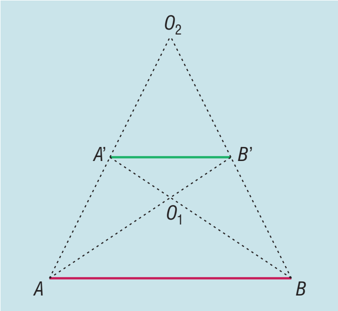
2315



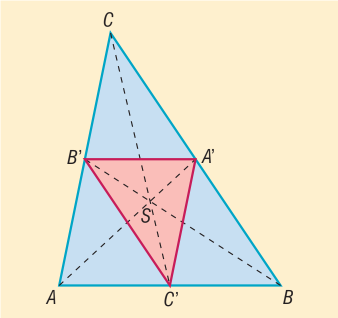
2316



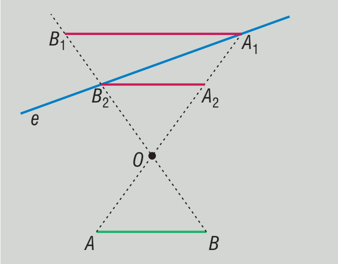
2317 Két ilyen pont van, melyeket az ábrán O_1, illetve O_2 jelöl. A hasonlóság aránya $-\frac{1}{2}$, vagy $\frac{1}{2}$.



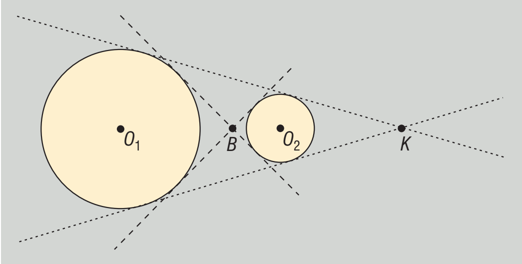
2318 A középpontos hasonlósági transzformáció középpontja a háromszög súlypontja, aránya $-\frac{1}{2}$.



2319 A feladatnak két megoldása van, melyeket az ábra szemléltet.



2320 A feladatnak két megoldása van: az úgynevezett külső és belső hasonlósági pontok. Ezek a pontok a két körhöz húzott közös külső, illetve közös belső érintők metszéspontjai. Ha a két kör sugara megegyezik, akkor a közös külső érintők párhuzamosak egymással, amiből következik, hogy csak egy megoldása van a feladatnak.



2321 A túra útvonala a valóságban 22,8 km, ennek megtételéhez 6 óra szükséges.

2322 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz.
e) Igaz. *f)* Igaz. *g)* Hamis. *h)* Igaz.

2323 *a)* Igen. *b)* Igen. *c)* Nem.

2324 A háromszög oldalai az egyes esetekben:
a) 4,5 cm, 6 cm, 9 cm; *b)* 10,5 cm, 14 cm, 21 cm;
c) 6 cm, 8 cm, 12 cm; *d)* 15 cm, 20 cm, 30 cm.



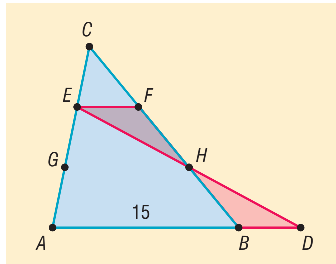
2325 A négyszög oldalai az egyes esetekben:

a) 16 cm, 12 cm, 20 cm, 24 cm; *b)* 24 cm, 18 cm, 30 cm, 36 cm;

c) 8 cm, 6 cm, 10 cm, 12 cm.

2326 A háromszög alapon fekvő szögei 72°-osak, szárszöge 36°-os.

2327 Az ábra jelöléseit használva megállapíthatjuk, hogy a CEF és CAB háromszögek hasonlók egymáshoz, továbbá a HEF és HDB háromszögek egybevágók egymással. Az elmondottakból következik, hogy $EF = 5$ cm és $BD = 5$ cm. (➡)



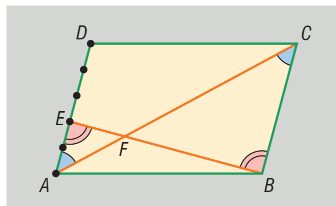
2328 A trapéz átlói az alapok arányában osztják egymást, így a keresett arány 1 : 7.

2329 A trapéz hosszabb alapja 60 cm. Ha az átlók $p : q$ arányban osztják egymást, akkor a hosszabb alap $12 \cdot \frac{q}{p}$ cm.

2330 A párhuzamos szakasz k hossza a két alap mértani közepe, azaz $k = \sqrt{a \cdot c}$.

2331 A trapéz kiegészítő háromszögének trapézon kívüli csúcsa 15 cm távolságra van az ismert szár rövidebb alapra illeszkedő végpontjától.

2332 Az ábra jelöléseinek megfelelően az AD oldalt 2 : 3 arányban osztó pontot E, az AC és BE szakaszok metszéspontját pedig F jelöli. Ekkor $AEF\sphericalangle = CBF\sphericalangle$, továbbá $EAF\sphericalangle = BCF\sphericalangle$, mivel páronként váltószögekről van szó. Az elmondottakból az is következik, hogy az AEF és CBF háromszögekben két-két szög egyenlő, így a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalak aránya



$$\frac{AF}{FC} = \frac{EF}{FB} = \frac{AE}{BC} = \frac{2}{5},$$

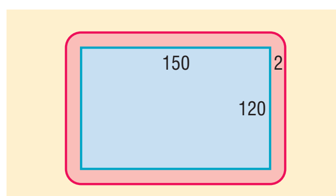
így a két szakasz 2 : 5 arányban osztja egymást.

2333 *a)* A lakónegyed a térképen ábrázolt téglalap középpontosan nagyított képének tekinthető, ahol a hasonlóság aránya 1500, ezért a lakónegyedet a valóságban egy 120 méter és 150 méter hosszú oldalakkal rendelkező téglalap határolja. A lakónegyed területe 18 000 m^2.

b) Ha járda szélessége mindenhol 2 méter, akkor a járda négy téglalapból, valamint négy negyedkörből áll az ábrának megfelelően.

A járda területe:

$$T = 2 \cdot 2 \cdot 120 + 2 \cdot 2 \cdot 150 + 2^2 \cdot \pi \approx 1092{,}57 \text{ m}^2.$$



2334 Mindkét feladat megoldásánál vegyük észre, hogy bármely két olyan háromszög hasonló egymáshoz, amelyben az oldalak aránya 2 : 3 : 4. Ezt az észrevételt felhasználva a szerkesztés lépései:

1. Szerkesztünk egy háromszöget, amelynek oldalai 2 cm, 3 cm, 4 cm.
2. Megszerkesztjük a kapott háromszög köré írt (beírt) körét.
3. Megjelöljük az egyik olyan pontot, amelyre vonatkozó középpontos hasonlóság a háromszög köré írt (beírt) körét az adott körbe viszi át.
4. A megszerkesztett háromszöget ugyanannak a középpontos hasonlóságnak vetjük alá, amely a köré írt (beírt) kört az adott körbe viszi át; a képháromszög köré írt (beírt) köre épp az adott kör lesz.



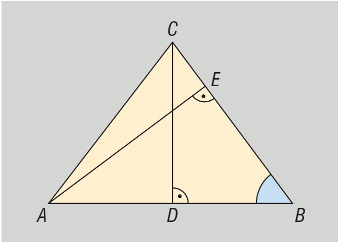
2335 A szerkesztés például azon az észrevételen alapulhat, hogy bármely két olyan háromszög hasonló egymáshoz, amelyekben a szögek megegyeznek. Ezért a szerkesztés lépései:

1. Szerkesztünk egy olyan háromszöget, amelynek szögei az adott szögekkel egyenlők.
2. A megadott szakaszt, melynek hossza a szerkeszteni kívánt háromszög kerületével egyenlő, felosztjuk az 1. pontban szerkesztett háromszög oldalainak arányában.
3. A kapott szakaszokkal, mint oldalakkal a szokásos módon háromszöget szerkesztünk.

2336 Vegyük észre, hogy bármely két olyan háromszög hasonló egymáshoz, amelyben egy szög, valamint a szöget közrefogó oldalak aránya megegyezik. Ezért a szerkesztés lépései a következők:

1. Szerkesztünk egy háromszöget, amelynek egyik szöge az adott szög, a közrefogó oldalak aránya pedig 2 : 3.
2. A megadott szakaszt, melynek hossza a szerkeszteni kívánt háromszög kerületével egyenlő, felosztjuk az 1. pontban szerkesztett háromszög oldalainak arányában.
3. A kapott szakaszokkal, mint oldalakkal a szokásos módon háromszöget szerkesztünk.

2337 *a)* A BCD és BAE háromszögek derékszögűek, továbbá a B csúcsnál lévő szögük közös, ezért a két háromszög szögei megegyeznek, ami igazolja a háromszögek hasonlóságát.

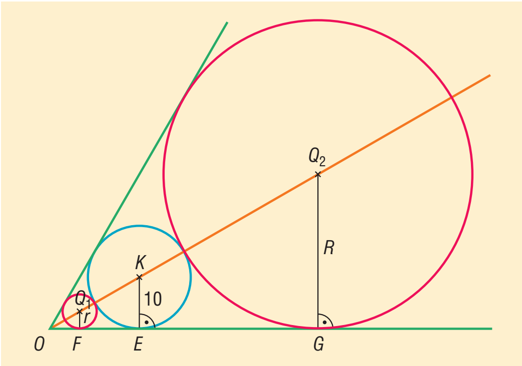


b) A hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért:

$$\frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC}, \quad \text{tehát} \quad \frac{BE}{12} = \frac{6}{BC}.$$

A BDC derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével $BC = 10$ cm adódik, és így $BE = 7{,}2$ cm, $EC = 2{,}8$ cm.

2338 Az adott kör középpontját az ábrán K, az egyik szögszáron létrejövő érintési pontját E jelöli. A feladatnak két megoldása van, amelyeket az ábrán piros színnel jelöltünk. A kisebb kör középpontját Q_1-gyel, a megfelelő száron kialakuló érintési pontját F-fel, a nagyobb kör középpontját Q_2-vel, érintési pontját G-vel jelöltük. Ekkor az OKE és OQ_2G háromszögek hasonlóak, hiszen mindkettő derékszögű, továbbá az O csúcsnál lévő szögük közös.



A háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért az $OQ_2 = OK + 10 + R$ összefüggést felhasználva:

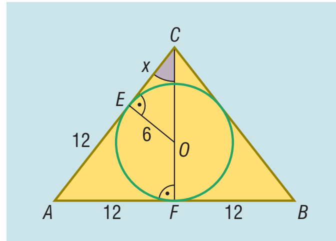
$$\frac{KE}{OK} = \frac{R}{OQ_2}, \quad \text{azaz} \quad \frac{10}{OK} = \frac{R}{OK + 10 + R}.$$

Vegyük még észre, hogy az OKE derékszögű háromszög O csúcsánál 30°-os szög van, ezért egy „félszabályos" háromszög. Az ilyen háromszögben az átfogó a rövidebb befogó kétszerese, vagyis $OK = 20$ cm. Az előző egyenlőségbe behelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve $R = 30$ cm adódik.

A kisebb, Q_1 középpontú kör sugara a fenti gondolatmenet értelemszerű módosításával számolható.

A számolásokat elvégezve $r = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ cm adódik.

2339 *a)* Ha az ABC háromszögbe írt kör az E pontban érinti a háromszög AC oldalát, akkor a kör érintőjének tulajdonsága alapján OE merőleges AC-re. Ebből kifolyólag az OEC háromszög derékszög csakúgy, mint az AFC háromszög. A két háromszög C csúcsánál lévő szögük közös, ezért a két háromszög szögei megegyeznek és így valóban hasonlók egymáshoz.



b) Az ábra jelölései alapján $CE = x$, és $AE = 12$ cm, hiszen az A pontból a háromszögbe írható körhöz húzott érintőszakaszok megegyeznek, vagyis $AE = AF = 12$ cm. Az OEC és AFC háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{x}{6} = \frac{CF}{12}, \quad \text{azaz} \quad CF = 2 \cdot x.$$

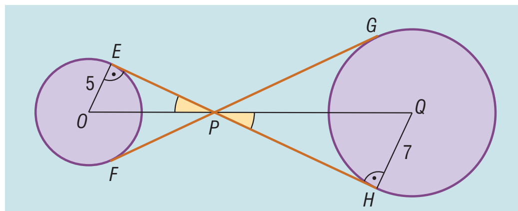
Az AFC háromszögben Pitagorasz tétele alapján:

$$12^2 + (2x)^2 = (x + 12)^2,$$

amiből $3x^2 - 24x = 0$, aminek egyetlen pozitív megoldása $x = 8$, tehát az ABC háromszög CF magassága 16 cm hosszúságú.

c) A háromszög alakú doboz területe 192 cm^2, a négyzet alakú dobozé 144 cm^2. Ebből következik, hogy a háromszög alakú doboz alapterülete a négyzet alakú dobozénál 33,33%-kal nagyobb.

2340 *a)* Ha a két érintő a P pontban metszi egymást, továbbá az érintési pontok E és F, valamint H és G, akkor az OPE háromszög hasonló a QPH háromszöghöz, ahol O és Q a körök középpontját jelölik (ld. ábra). Ezt azonnal beláthatjuk, ha felidézzük, hogy a kör érintője merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra, valamint hivatkozunk arra, hogy a két háromszögben a P csúcsnál csúcsszögek vannak, amelyek egyenlő nagyságúak. A két háromszög megfelelő oldalainak arányára:

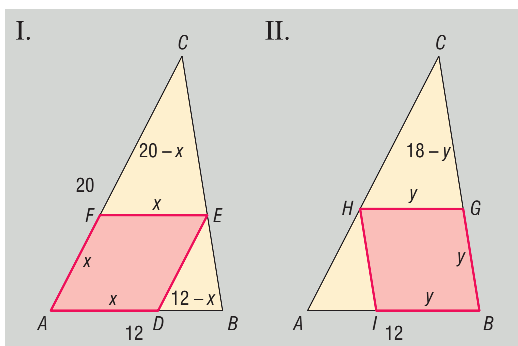


$$\frac{5}{OP} = \frac{7}{300 - OP}, \quad \text{amiből } OP = 125 \text{ méter.}$$

b) Az OEP háromszögben Pitagorasz tételével EP kiszámolható: $EP = 124{,}90$ m. A PHQ háromszögben EP-nek PH felel meg, és a hasonlóság aránya $\frac{7}{5}$, ezért $PH = \frac{7}{5} \cdot EP = 174{,}86$ méter, így az EH sétaút kb. 299,76 méter hosszú, és ezért a két sétaút együtt 599,52 méter.

2341 *a)* A feltételeknek megfelelő rombusznak és a háromszögnek egy közös szöge van. Mivel ez a közös szög a háromszög bármelyik szöge lehet, ezért összesen háromféleképpen tudunk rombuszt írni a háromszögbe.

b) Vizsgáljuk azt az esetet, amikor az A csúcs közös csúcsa a rombusznak és a háromszögnek (I.). Az $ADEF$ rombusz oldalának hosszát jelöljük x-szel. Ekkor az ábrán szereplő FEC és ABC háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként megegyeznek), így:



$$\frac{FE}{FC} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{azaz} \quad \frac{x}{20 - x} = \frac{12}{20},$$

$$x = \frac{12 \cdot 20}{20 + 12} = 7{,}5 \text{ cm.}$$

A második esetben (II.) a közös csúcs a B pont. A rombusz oldala ugyanúgy számolható, mint az előbb. A számolások elvégzése után azt kapjuk, hogy a rombusz oldala:

$$y = \frac{18 \cdot 12}{18 + 12} = 7{,}2 \text{ cm}.$$

Végül a harmadik esetben a C csúcs a közös csúcsa a rombusznak és a háromszögnek. Ekkor a rombusz oldalára:

$$z = \frac{18 \cdot 20}{18 + 20} = \frac{180}{19} \;(\approx 9{,}47) \text{ cm adódik.}$$

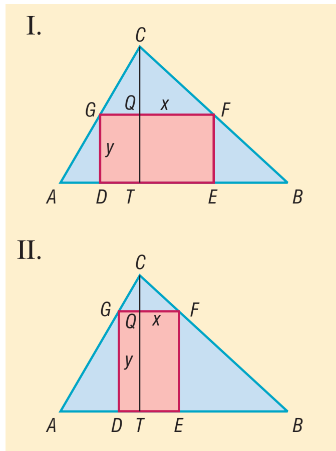
2342 A feladat feltételeinek eleget tevő téglalap csúcsait D, E, F, G jelöli, míg T az AB oldalhoz tartozó magasság talppontja, Q a CT magasság és a GF szakasz metszéspontja (ld. ábra). A feladatnak két megoldása van attól függően, hogy a téglalapnak a hosszabb, vagy a rövidebb oldala párhuzamos az AB oldallal. Vizsgáljuk előbb azt az esetet, amikor a hosszabb oldal párhuzamos az AB-vel, vagyis $x:y = 5:3$ (I.). Mivel az ABC háromszög hasonló az GFC háromszöghöz (szögeik páronként megegyeznek), ezért:

$$\frac{x}{12 - y} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}, \quad \text{amiből} \quad 3x = 60 - 5y.$$

A téglalap oldalainak arányából következik, hogy $3x = 5y$, és így $y = 6$ cm, $x = 10$ cm.

A második esetben (II.) a téglalap rövidebb oldala párhuzamos az AB oldallal, vagyis $x:y = 3:5$. Ebben az esetben a megfelelő aránypár változatlan, csak ezúttal $5x = 3y$.

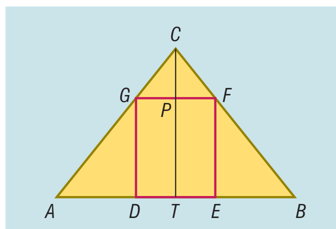
A téglalap oldalai: $y = \dfrac{150}{17} \approx 8{,}82$ cm és $x = \dfrac{90}{17} \approx 5{,}29$ cm.



2343 Az ABC háromszögben $AB = 24$ cm, a hozzá tartozó CT magasság 15 cm, a beírt $DEFG$ téglalap GF oldala 8 cm (ld. ábra). Ekkor a GFC és ABC háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként megegyeznek), ezért:

$$\frac{CP}{8} = \frac{15}{24},$$

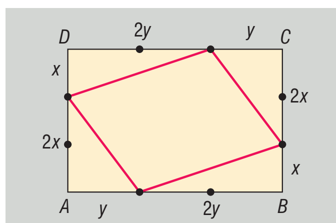
amiből $CP = 5$ cm, így $PT = 10$ cm. A téglalap másik oldala 10 cm.



2344 *a)* Ha a téglalap oldalai 12 cm és 18 cm, akkor $x = 4$ cm és $y = 6$ cm. A visszamaradó négyszög oldalai Pitagorasz tételének alkalmazásával számolhatók.

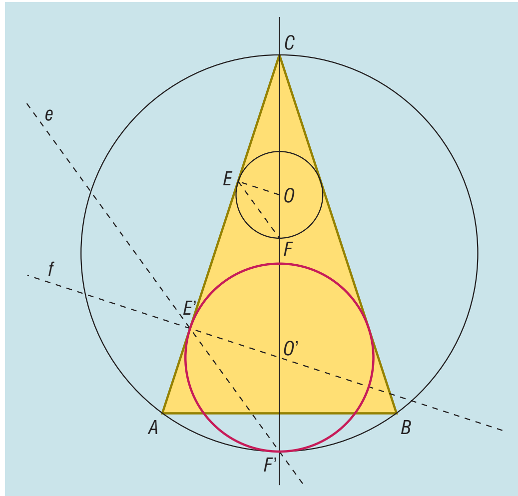
A négyszög oldalai 10 cm, illetve $\sqrt{160} \approx 12{,}65$ cm.

b) A visszamaradó négyszög paralelogramma.



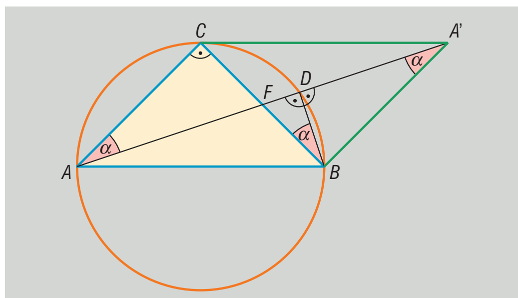
2345 Előbb egy egyszerűbb feladat megoldását elemezzük. Hagyjuk el a feladat feltételei közül azt, hogy a szerkesztendő kör érinti az ABC háromszög köré írt kört. Ekkor a következő problémához jutunk: szerkesszünk olyan kört, amely érinti a háromszög két szárát. Ilyen körből végtelen sok van, a középpontjuk a C csúcsból induló szögfelezőn található. A megszerkesztett kört egy C középpontú középpontos hasonlósággal átvihetjük abba a körbe, amely már a háromszög köré írt kört is érinti.

Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők.



1. Az ABC háromszög köré írható kört szerkesztünk.
2. Az ABC háromszög C csúcsából induló szögfelezőt (egyben a magasságvonalat), valamint a kör C-vel átellenes F' pontját megszerkesztjük.
3. Az AC szár egy tetszőleges E pontjában a szárra merőlegest szerkesztünk. Ennek CF'-vel való metszéspontja O.
4. Megszerkesztjük az O középpontú, OE sugarú kört, ami érinti a szárakat, valamint a szögfelezővel való, C-től távolabbi metszéspontja F.
5. Az F' ponton átmenő, EF-fel párhuzamos e egyenest szerkesztünk.
6. Az EO szakasz megszerkesztése.
7. Megszerkesztjük az e egyenes és az AC szár E' metszéspontján átmenő, EO-val párhuzamos f egyenest.
8. Az f egyenes és a CF' szakasz O' metszéspontját, valamint az O' középpontú E'-t tartalmazó kört megszerkesztjük.

2346 Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontját az ábrának megfelelően F-fel, az A pont F-re vonatkozó tükörképét A'-vel, a $CAD\sphericalangle$-et α-val jelöltük. Az $ABA'C$ négyszög középpontosan szimmetrikus az F pontra vonatkozóan, azaz a négyszög paralelogramma, így AC és $A'B$ párhuzamosak. Ebből adódóan $CAD\sphericalangle = DA'B\sphericalangle = \alpha$, mivel váltószögekről van szó. Vegyük még észre, hogy Thalész tétele alapján $ADB\sphericalangle = 90°$, amiből azonnal következik, hogy $A'DB\sphericalangle = 90°$ szintén teljesül. Ekkor azonban az AFC és $A'BD$ háromszögekben két-két szög megegyezik, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. Ugyanígy hasonló egymáshoz az AFC és BFD háromszög is, mivel mindkettő derékszögű, továbbá a $CAF\sphericalangle = CAD\sphericalangle$, valamint a $DBF\sphericalangle = DBC\sphericalangle$ egyaránt a rövidebb DC köríven nyugvó kerületi szögek, és ezért a kerületi szögek tétele alapján mindkét szög α-val egyenlő.



Az AFC és BFD háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{FC}{AC} = \frac{FD}{BD}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{2} = \frac{FD}{BD}, \quad \text{amiből} \quad FD = \frac{1}{2} \cdot BD. \qquad (1)$$

Az AFC és $A'BD$ háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{FC}{AC} = \frac{BD}{A'D}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{2} = \frac{BD}{A'D}, \quad \text{amiből} \quad A'D = 2 \cdot BD. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) összefüggések megfelelő oldalait összeadva:

$$FD + A'D = \frac{5}{2} \cdot BD \quad \Rightarrow \quad FA' = \frac{5}{2} \cdot BD.$$

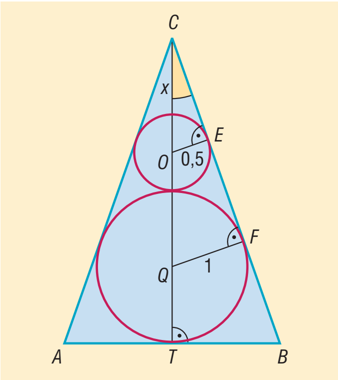


Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért $AF = FA'$, így $AF = \frac{5}{2} \cdot BD$ szintén teljesül. Ekkor viszont:

$$AD = AF + FD = \frac{5}{2} \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot BD = 3 \cdot BD,$$

amit bizonyítani kellett.

2347 *a)* Az ábrán az ABC egyenlő szárú háromszögbe írt kisebb kör középpontját O, a nagyobbét Q, míg a BC száron lévő érintési pontokat E, illetve F jelöli. Látható, hogy a COE, valamint a CQF háromszögekben a C csúcsnál lévő szög közös, továbbá mindkét háromszög derékszögű, így a két háromszög hasonló egymáshoz. Ha $CO = x$, akkor



$$\frac{x}{0,5} = \frac{x + 1,5}{1},$$

$$x = 1,5 \text{ méter}.$$

Ezek alapján az ABC háromszög CT magasságának hosszára:

$$CT = x + OQ + QT = 1,5 + 1,5 + 1 = 4 \text{ méter}.$$

A szintén derékszögű CBT háromszögben a C csúcsnál ugyanakkora szög van, mint a COE háromszögben, ezért ez a két háromszög is hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{CB}{CT} = \frac{CO}{CE}, \quad \text{azaz} \quad \frac{CB}{4} = \frac{1,5}{CE}.$$

A COE háromszög CE befogójának hosszára Pitagorasz tételével kapjuk:

$$CE = \sqrt{2} \text{ m } (\approx 1,41 \text{ m}).$$

Az utolsó egyenlőségbe történő visszahelyettesítés után:

$$CB = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \text{ m } (\approx 4,24 \text{ m}).$$

A COE és CBT háromszögek hasonlóságát még egyszer felhasználva:

$$\frac{BT}{CT} = \frac{OE}{CE}, \quad \text{azaz} \quad \frac{BT}{4} = \frac{0,5}{\sqrt{2}}.$$

Rendezés után megkapjuk BT hosszát:

$$BT = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ m } (\approx 1,41 \text{ m}).$$

A kartonlap oldalai tehát $AB = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,83$ méter, $BC = AC = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4,24$ méter.

b) Az ABC kartonlap területe:

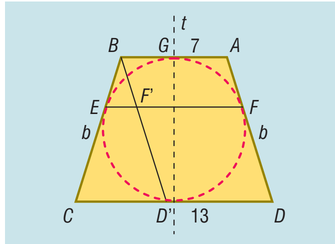
$$T = \frac{AB \cdot CT}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{2} = 4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}^2 \ (\approx 5,66 \text{ m}^2).$$

A két céltábla területének összege:

$$t = 0,5^2 \cdot \pi + 1^2 \cdot \pi = \frac{5 \cdot \pi}{4} \text{ m}^2 \ (\approx 3,93 \text{ m}^2).$$

A veszteség: $\frac{T - t}{T} \approx 0,306$, azaz körülbelül 30,6%.

2348 *a)* Mivel az $ABCD$ négyszög szimmetrikus trapéz, ezért szárai megegyeznek, azaz $AD = BC = b$. Az érintőnégyszögek tétele alapján a trapéz szemközti oldalai hosszának összege megegyezik, azaz $2 \cdot b = 7 + 13 = 20$, így $b = 10$ cm. A trapéz szárai 10 cm hosszúak.



b) Használjuk ki, hogy a trapéz tengelyesen szimmetrikus az alapok közös felezőmerőlegesére, amelyet az ábrán t-vel jelöltünk. A t tengelyre vonatkozó tükrözés a beírt kört önmagába, míg a BC szárat az AD szárba viszi át. Nyilvánvaló, hogy az E érintési pont képe az F érintési pont. Ebből következik, hogy a t tengelyre vonatkozó tükrözés az EF szakaszt szintén önmagába viszi. Ez csak úgy lehetséges, ha az EF szakasz merőleges a tükrözés tengelyére, de ekkor EF valóban párhuzamos a trapéz alapjaival.

c) Toljuk el az AD szárat önmagával párhuzamosan úgy, hogy az A csúcs a B csúcsba, a D csúcs a D', az F pont az F' pontba kerüljön. Ekkor $BD' = AD = 10$ cm, továbbá a $D'DAB$ négyszög paralelogramma, ezért $DD' = BA = 7$ cm, amiből $CD' = 6$ cm adódik.

A $CD'B$ és az $EF'B$ háromszög szögei páronként megegyeznek, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz, így megfelelő oldalaik arányára igaz, hogy:

$$\frac{CD'}{BC} = \frac{EF'}{BE}, \quad \text{azaz} \quad \frac{6}{10} = \frac{EF'}{BE}.$$

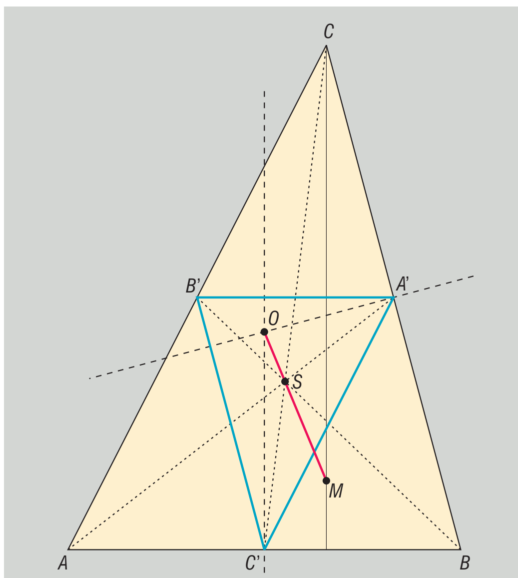
Végül vegyük észre, hogy a B pontból a trapézba írható körhöz húzott érintőszakaszok, BE és BG egyenlők, továbbá G az AB szakasz felezőpontja, ezért $BE = BG = 3{,}5$ cm. Helyettesítsük be a kapott eredményt az utolsó egyenlőségbe, így adódik, hogy:

$$\frac{6}{10} = \frac{EF'}{3{,}5}, \quad EF' = 2{,}1 \text{ cm}.$$

Ekkor viszont

$$EF = EF' + F'F = 2{,}1 + 7 = 9{,}1 \text{ cm}.$$

2349 Az ábrán az ABC háromszög oldalfelező pontjait A', B', C'; súlypontját S; magasságpontját M; köré írható körének középpontját pedig O jelöli. A súlypont ismert tulajdonságait ezúttal úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az ABC háromszöget a súlypontra vonatkozó $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság átviszi az $A'B'C'$ háromszögbe. Megmutatjuk, hogy a középpontos hasonlóság az M pontot az O pontba viszi át. Ehhez elegendő belátnunk, hogy az O pont egyben az $A'B'C'$ háromszög magasságpontja is. Mivel az O pont az ABC háromszög köré írható körének középpontja, ezért O illeszkedik pl. az A' pontban a BC-re emelt merőlegesre. Ez a merőleges azonban nemcsak a BC-re, hanem az azzal párhuzamos $B'C'$-re is merőleges, azaz az $A'B'C'$ háromszögnek egyben egyik magasságvonala is.

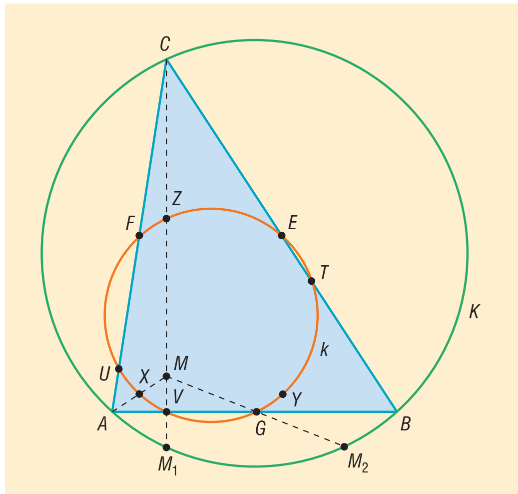


Hasonlóan igazolható, hogy O az $A'B'C'$ háromszög másik két magasságvonalán is rajta van, ezért O valóban az $A'B'C'$ háromszög magasságpontja.

A középpontos hasonlóság során a pont (M), a képe (O), valamint a hasonlóság centruma (S) egy egyenesre illeszkednek, ezért a feladat állítását igazoltuk. Mivel az S középpontú, $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság M-et O-ba viszi, ezért S az OM szakaszt $1:2$ arányban osztja úgy, hogy az O ponthoz van közelebb.

Megjegyezzük, hogy szabályos háromszögben a három nevezetes pont egybeesik, ezért nem jön létre egyértelműen az Euler-egyenes.

2350 Az ABC háromszög K köré írt körét az M magasságpontból felére kicsinyítve a k kört kapjuk. Megmutatjuk, hogy a k kör tartalmazza az AB oldalhoz tartozó magasságvonal V talppontját, az AB oldal G felezőpontját, valamint az AM szakasz X felezőpontját (lásd ábra). Ez utóbbi nyilvánvaló, hiszen az A csúcs a K kör egy pontja, M pedig a középpontos hasonlóság centruma, ezért az A pont éppen az AM szakasz X felezőpontjába megy át.



A 2292. feladat *a)* részfeladatában megmutattuk, hogy az M pont AB egyenesre vonatkozó M_1 tükörképe illeszkedik a háromszög köré írható K körre. Ekkor azonban az MM_1 szakasz V felezőpontja a tükörtengely, vagyis az AB oldalegyenes egy pontja. Mivel az MM_1 szakasz egyben merőleges is az AB egyenesre csakúgy, mint a CM egyenes, ezért a C csúcsból induló magasságvonal tartalmazza az MM_1 szakaszt, így a V pont éppen a magasságvonal talppontja. Összefoglalva elmondhatjuk, hogy a K körön található M_1 pont M-re vonatkozó kicsinyített képe (V) az AB oldalhoz tartozó magasságvonal talppontja. Mivel a kicsinyítés illeszkedéstartó, ezért a V pont valóban illeszkedik a K kör kicsinyített képére, azaz a k körre.

A 2292. feladat *b)* részfeladatában azt is megmutattuk, hogy az M pontnak az AB szakasz G felezőpontjára vonatkozó tükörképe (M_2) szintén illeszkedik a K körre. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a K körön lévő M_2 pont kicsinyített képe megegyezik a G ponttal. Ebből következik, hogy a G pont valóban illeszkedik a k körre.

Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy nemcsak az X, V, G pontok illeszkednek a K kör kicsinyített képére, hanem a háromszög másik két oldalának felezőpontjai (E és F), a másik két csúcs és a magasságpont közti szakaszok felezőpontjai (Y és Z), valamint a másik két magasságvonal talppontjai (U és T) is. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

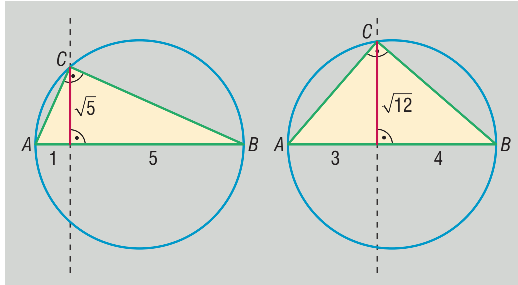
Arányossági tételek a derékszögű háromszögben és a körben – megoldások

2351 A kör sugara 6,5 cm. A feladat a magasságtétel segítségével is megoldható: $\sqrt{(2r-9)\cdot 9}=6$, amiből $r=6{,}5$ cm. Mivel $6{,}5<9$, ezért a 9 cm a nagyobb körszelet magassága.

2352 Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két olyan részre bontja, amelyek hossza $\frac{25}{\sqrt{34}}\approx 4{,}29$ cm, illetve $\frac{9}{\sqrt{34}}\approx 1{,}54$ cm. Az átfogóhoz tartozó magasság hossza $\frac{15}{\sqrt{34}}\approx 2{,}57$ cm.



2353 A feladat megoldható például a magasságtétel alkalmazásával. A szerkesztés menetét az ábrán követhetjük nyomon. (➡)



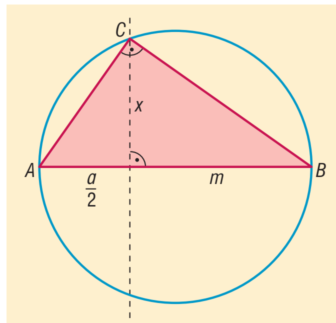
2354 A háromszög befogóinak hossza:

$$16\cdot\sqrt{3}\approx 27{,}71\text{ cm}\quad\text{és}\quad 16\text{ cm}.$$

2355 A háromszög másik befogója: $\frac{65}{12}\approx 5{,}42$ cm, az átfogója $\frac{169}{12}\approx 14{,}08$ cm. Az átfogóhoz tartozó magasság 5 cm hosszú.

2356 A két négyzet területének aránya $2:5$.

2357 Ha a szabályos háromszög oldala a, magassága m, akkor területe $\frac{a\cdot m}{2}$, a vele megegyező területű négyzet oldala pedig $x=\sqrt{\frac{a}{2}\cdot m}$. Az x hosszúságú szakasz szerkesztése a magasságtétel segítségével történhet. A szerkesztés menete az ábrán nyomon követhető. A négyzet oldalának ismeretében a négyzet a szokásos módon szerkeszthető. (➡)

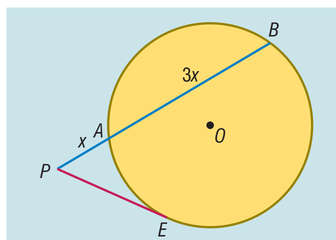


2358 Feladatként a $\sqrt{15}$ cm hosszú szakaszt kell megszerkeszteni. A szerkesztés a magasságtétel segítségével történhet. A négyzet oldalának ismeretében a négyzet a szokásos módon szerkeszthető.

2359 A trapéz magassága $\sqrt{50}\approx 7{,}07$ cm, területe $10\cdot\sqrt{50}\approx 70{,}71\text{cm}^2$.

2360 Ha a P ponton át húzott szelő a kört A-ban és B-ben metszi, akkor $PA=x$, $PB=4\cdot x$, és ebből adódóan $AB=3\cdot x$. A PB szelőszakasz 12 cm-rel hosszabb, mint PA, ezért $AB=12$ cm, amiből $x=4$ cm. Ekkor az érintő- és szelőszakaszok tétele szerint a P-ből húzott érintőszakasz hossza:

$$PE=\sqrt{x\cdot 4x}=2\cdot x=8\text{ cm}.$$



2361 A két szelőszakasz hossza 5 cm, 20 cm.

2362 *a)* A pont a kör középpontjától $\sqrt{35}\approx 5{,}92$ cm távolságra van.

b) A szelő a kör középpontjától $\frac{\sqrt{95}}{2}\approx 4{,}87$ cm távolságra halad.

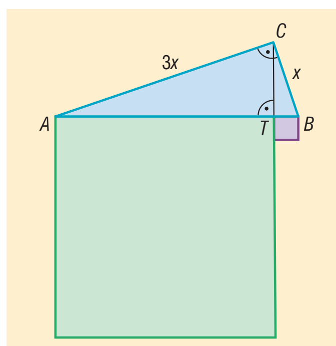
2363 A feltételek szerint az ABC derékszögű háromszög befogóit $BC=x$, $AC=3\cdot x$ alakban írhatjuk fel. Ha az átfogóhoz tartozó magasság talppontja T, akkor a befogótétel alapján:

$$x^2=BT\cdot AB\quad\text{és}\quad (3x)^2=AT\cdot AB.$$

A két egyenlőség megfelelő oldalait egymással elosztva, négyzetre emelés után adódik, hogy:

$$\frac{1}{9}=\frac{BT}{AT},\quad\text{amiből}\quad \frac{1}{81}=\frac{BT^2}{AT^2}.$$

A kapott egyenlőség alapján az átfogó két szeletére emelt négyzetek területének aránya $1:81$.

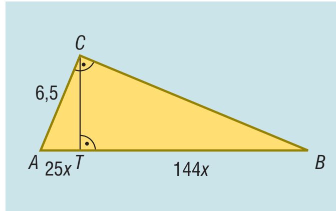




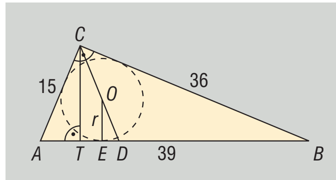
2364 Az ábra jelölései mellett a CT magasság az AB átfogót két olyan szakaszra bontja, amelyek hossza $25 \cdot x$ és $144 \cdot x$. A befogótétel alapján:

$$6{,}5 = \sqrt{25x \cdot 169x} = 65x,$$

amiből $x = 0{,}1$. A háromszög átfogója így 16,9 cm, hosszabb befogója Pitagorasz tételével számolható. A BC befogó hossza 15,6 cm.



2365 *a)* A háromszög AB átfogója Pitagorasz tételével számolható: $AB = 39$ cm. Ha az átfogóhoz tartozó magasság talppontja T, akkor a befogótétel alapján $15^2 = AT \cdot 39$, $36^2 = BT \cdot 39$, és így $AT = 5{,}77$ cm, $BT = 33{,}23$ cm.



b) Az átfogóhoz tartozó CD szögfelező hossza a CTD derékszögű háromszögből számolható. Előbb azonban kiszámoljuk az AD és BD szakaszok hosszát a szögfelezőtétellel:

$$\frac{AD}{39 - AD} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}, \text{ amiből } AD\text{-t kifejezve: } AD = \frac{195}{17} \ (\approx 11{,}47 \text{ cm}).$$

A CTD háromszög TD befogója: $TD = AD - AT = 11{,}47 - 5{,}77 = 5{,}7$ cm.

A CT magasság az ABC háromszögben a magasságtétellel számolható:

$$CT = \sqrt{AT \cdot BT} = 13{,}85 \text{ cm}.$$

Végül a CTD háromszögben Pitagorasz tételével kapjuk, hogy:

$$CD = \sqrt{TD^2 + CT^2} = \sqrt{5{,}7^2 + 13{,}85^2} \approx 14{,}98 \text{ cm}.$$

c) A háromszög területe $t = r \cdot s$, ahol r a beírt kör sugara, s a háromszög kerületének fele. Ezek alapján:

$$\frac{15 \cdot 36}{2} = r \cdot \frac{15 + 36 + 39}{2},$$

amiből $r = 6$ cm-t kapunk.

d) Az EDO és TDC háromszögek hasonlók egymáshoz, mivel szögeik páronként megegyeznek. Ezek alapján a megfelelő oldalak aránya megegyezik, vagyis:

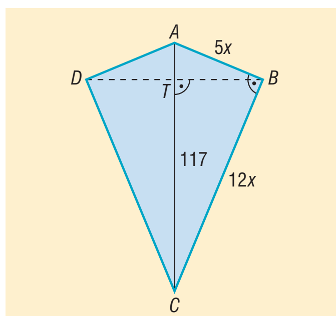
$$\frac{r}{OD} = \frac{CT}{CD}.$$

A már kiszámított adatokat behelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve $OD = 6{,}49$ cm-t kapunk. A beírt kör középpontjának C csúcstól való távolsága: $CO = CD - OD = 8{,}49$ cm.

2366 *a)* Ha a két háromszögből a leírtak alapján készítünk sárkányt, akkor az $ABCD$ deltoidhoz jutunk. A deltoidban $AB = 5 \cdot x$, $BC = 12 \cdot x$, az AC átló 117 cm hosszú, továbbá a B és D csúcsánál derékszögek vannak (lásd ábra). Az ABC háromszögben Pitagorasz tétele alapján $(5x)^2 + (12x)^2 = 117^2$, amiből $x = 9$ cm, a háromszög befogói pedig: $AB = 45$ cm, $BC = 108$ cm. Szintén az ABC háromszögben a befogótétel is alkalmazható, így kapjuk, hogy:

$$45^2 = AT \cdot 117 \quad \text{és} \quad 108^2 = CT \cdot 117.$$

A számolásokat elvégezve $AT = 17{,}3$ cm, illetve $CT = 99{,}7$ cm.

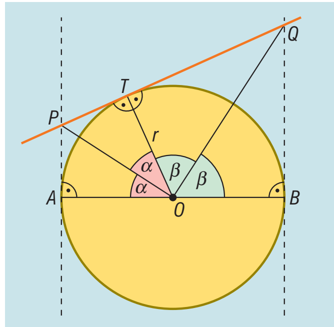


Végül alkalmazzuk a magasságtételt az ABC háromszögben: $BT = \sqrt{17{,}3 \cdot 99{,}7} = 41{,}5$ cm. A deltoid átlói, azaz a szükséges nádszálak hossza: $BD = 83{,}0$ cm, $AC = 117{,}0$ cm.

b) Az *a)* részfeladatban kiszámoltuk, hogy a BD átló az AC átlót 17,3 cm, illetve 99,7 cm hosszú részekre bontja. Mivel a deltoid szimmetriatengelye megfelezi a másik átlót, ezért az AC átló a BD-t két egyenlő részre bontja:

$$BT = TD = 41{,}5 \text{ cm}.$$

2367 *a)* A két párhuzamos érintő az ábra szerint az A és B pontokban érinti a kört, a PQ érintő érintési pontját pedig T jelöli. Mivel az érintő merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra, ezért az érintési pontoknál kialakuló szögek 90º-osak; ezeket az ábrán bejelöltük. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok megegyeznek, ezért $PA = PT$, illetve $QT = QB$. Vegyük még észre, hogy az AOP, TOP, TOQ, BOQ háromszögekben egy-egy befogó a kör sugarával egyenlő, amiből az is következik, hogy az AOP háromszög a TOP háromszöggel, a TOQ háromszög pedig a BOQ háromszöggel egybevágó (két oldal + a közrezárt szög egyenlősége alapján).



Az egybevágó háromszögekben az egymásnak megfelelő szögek egyenlők, azaz:

$$AOP\sphericalangle = TOP\sphericalangle = \alpha, \quad \text{valamint} \quad TOQ\sphericalangle = BOQ\sphericalangle = \beta.$$

Ez azt is jelenti, hogy:

$$POQ\sphericalangle = \alpha + \beta = \frac{AOB\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a POQ háromszög derékszögű.

b) A már elmondottakból következik, hogy OT a POQ háromszög PQ átfogójához tartozó magassága, így a magasságtétel alapján

$$r = TO = \sqrt{PT \cdot TQ},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

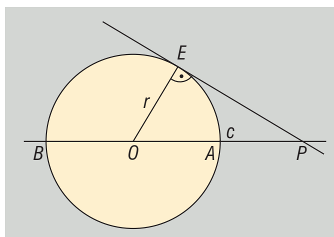
2368 *a)* A megoldás az ábrán látható.

b) A szelőszakaszok hossza: $PA = c - r$, $PB = c + r$.

c) A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele alapján:

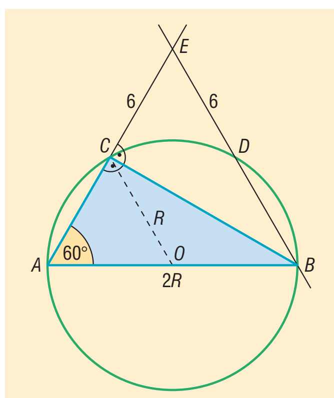
$$(c - r)\cdot(c + r) = PE^2.$$

Ha elvégezzük a bal oldali műveleteket, és a kapott egyenlőséget átrendezzük, akkor $c^2 = PE^2 + r^2$-hez jutunk, ami éppen Pitagorasz tétele az OEP derékszögű háromszögben.



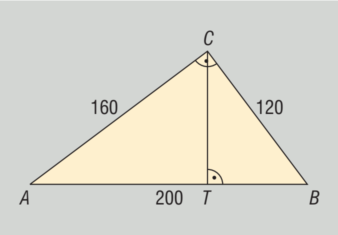
2369 *a)* Belátható, hogy a D pont csak a rövidebb BC köríven helyezkedhet el. Ekkor viszont az érintő- és szelőszakaszok tétele alapján $EC \cdot EA = ED \cdot EB$, továbbá $EC = ED = 6$ miatt $EA = EB$. Ez azt is jelenti, hogy az ABE háromszög egyenlő szárú és az alapon fekvő egyik szöge 60°-os. Ebből adódóan az alapon fekvő másik szöge is 60º-os, így a háromszög valóban szabályos.

b) Ha az ABC háromszög köré írt kör sugarát R jelöli, akkor az AOC egyenlő szárú háromszögben két oldal hossza R, továbbá az AC alapon fekvő szög 60º-os, ezért a háromszög szintén szabályos, így $AC = R$. Ekkor az ABE szabályos háromszög AB oldala $2R$, EA oldala $R + 6$. A két oldal egyenlősége alapján $R = 6$ cm.

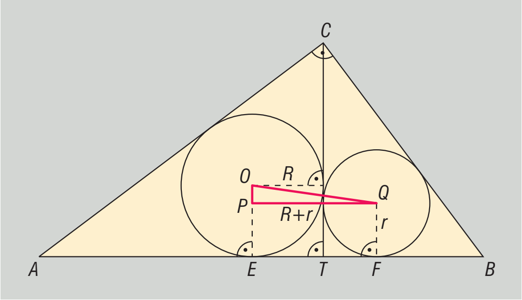




2370 *a)* A park AB átfogójára Pitagorasz tételével $AB = 200$ méter adódik. Az átfogóhoz tartozó CT magasság az átfogót az AT és BT szakaszokra bontja. Ekkor a befogótételt az AC befogóra felírva: $160^2 = AT \cdot 200$, $AT = 128$ m, amiből $BT = 72$ m. A háromszög CT magassága a magasságtétellel számolható: $CT^2 = 128 \cdot 72$, így $CT = 96$ m. Ekkor a park egyik részének megkerülése 384 méter, a másik részé 288 méter hosszú sétával lehetséges.



b) A szökőkutak az ATC, ill. a BTC háromszögek beírt köreinek középpontjába kerülnek. Legyen az ábra jelöléseinek megfelelően a két kút O és Q, a két háromszög beírt köreinek sugara R és r, a beírt körök átfogóval vett érintési pontjai E és F. Mivel a kör érintője merőleges az érintési ponthoz tartozó sugarára, ezért OE és QF merőleges az AB átfogóra, amiből következik, hogy egymással viszont párhuzamosak.



Ez azt is jelenti, hogy az $OEFQ$ négyszög trapéz, amelynek alapjai OE és QF. Ha ebben a trapézban meghúzzuk a QP magasságot, akkor az OPQ derékszögű háromszögben

$$OP = OE - PE = OE - QF = R - r, \text{ továbbá } PQ = ET + TF = R + r.$$

Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az OPQ háromszögben, így

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2,$$
$$OQ^2 = (R - r)^2 + (R + r)^2,$$
$$OQ^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + R^2 + 2Rr + r^2,$$
$$OQ = \sqrt{2 \cdot (R^2 + r^2)}.$$

Látható, hogy az OQ kiszámolása R és r ismeretében már nem nehéz feladat. A két sugár kiszámolásához használjuk fel, hogy a háromszög területe a beírt kör sugarának és félkerületének szorzata, ezért:

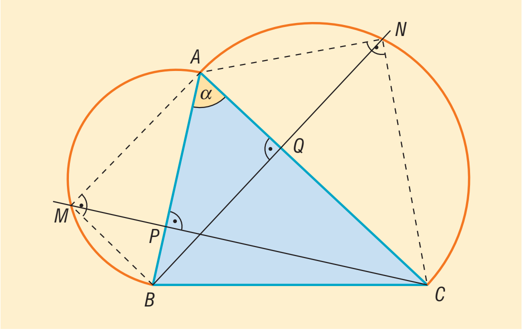
$$R = \frac{T_{ATC}}{s_{ATC}} = \frac{128 \cdot 96}{128 + 96 + 160} = 32 \text{ m}, \quad \text{illetve} \quad r = \frac{T_{BTC}}{s_{BTC}} = \frac{72 \cdot 96}{72 + 96 + 120} = 24 \text{ m}.$$

Ekkor az OQ szakasz hossza

$$OQ = \sqrt{2 \cdot (32^2 + 24^2)} = 40 \cdot \sqrt{2} \approx 57{,}0 \text{ méter}.$$

A két szökőkút távolsága 57 méter.

2371 *a)* A feladat szövegének megfelelő ábra:



b) Az APC és AQB derékszögű háromszögekben az A csúcsnál ugyanakkora hegyesszög van, ezért a két háromszög szögei páronként megegyeznek, így hasonlók egymáshoz. A megfelelő oldalaik aránya:

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB},$$

amiből átrendezés után éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

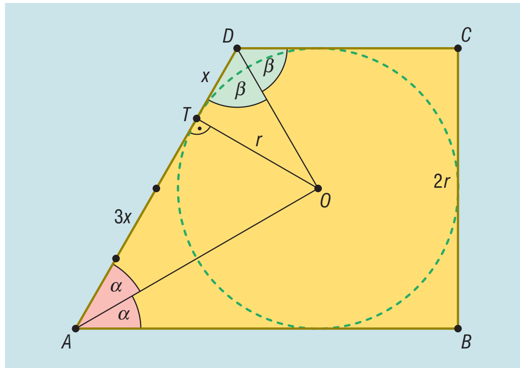


c) Thalész tétele alapján az ABM és ACN háromszögek derékszögűek, ezért külön-külön alkalmazható bennük a befogótétel:

$$AM^2 = AP \cdot AB \quad \text{és} \quad AN^2 = AQ \cdot AC.$$

Mivel a két egyenlőség jobb oldalán egyenlő mennyiségek állnak (lásd *b)* részfeladat eredménye), ezért a bal oldalak is megegyeznek, azaz $AM = AN$. Ez pontosan azt jelenti, hogy az A csúcs az M és N pontoktól ugyanolyan távolságra van.

2372 *a)* A beírt kör O középpontja egyenlő távolságra van a négyszög oldalaitól, ezért minden szögfelezőre illeszkedik. Ebből következően az ábrán azonos módon jelölt szögek egymással megegyeznek. A trapéz egy szárán fekvő szögeinek összege 180°, ezért $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$. Ekkor az OAD háromszögben két szög összege 90°, ebből következik, hogy az O csúcsnál valóban derékszög van.



b) Ha a trapézba írt kör az AD szárat a T pontban érinti, akkor OT merőleges az AD szárra, továbbá ha $DT = x$, akkor a feltételek alapján $TA = 3x$. Alkalmazva az OAD háromszögre a magasságtételt azt kapjuk, hogy:

$$r^2 = x \cdot (3x) = 3x^2, \; r = \sqrt{3} \cdot x,$$

ahol r a beírt kör sugarát jelöli. A trapézba írt kör sugarának, valamint az AD szár hosszának aránya:

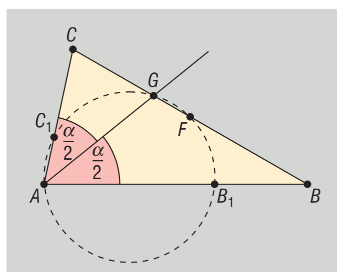
$$\frac{r}{AD} = \frac{r}{4x} = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{4 \cdot x} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

c) Mivel a trapéz érintőnégyszög, ezért az érintőnégyszögek tétele alapján a szemközti oldalainak összege megegyezik, azaz $AD + BC = 20$ cm. Felhasználjuk, hogy $BC = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x$, és $AD = 4 \cdot x$, így $\left(2 \cdot \sqrt{3} + 4\right) \cdot x = 20$, így:

$$x = \frac{20}{2 \cdot \sqrt{3} + 4}, \quad \text{és} \quad AD = 10{,}7 \text{ cm}, \; BC = 9{,}3 \text{ cm}.$$

2373 Tegyük fel, hogy $AB > AC$. Alkalmazzuk a körhöz húzott szelőszakaszok tételét a B, majd a C pontra:

$$BF \cdot BG = BB_1 \cdot BA, \quad CG \cdot CF = CC_1 \cdot CA.$$



Mivel az F pont a BC oldal felezőpontja, így $BF = CF$, ezért ha a két egyenlőség megfelelő oldalait elosztjuk egymással, valamint a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezzük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{BG}{CG} = \frac{BB_1 \cdot BA}{CC_1 \cdot CA}.$$

Használjuk fel még a szögfelezőtételt az A csúcsból induló szögfelezőre:

$$\frac{BG}{CG} = \frac{BA}{CA}.$$

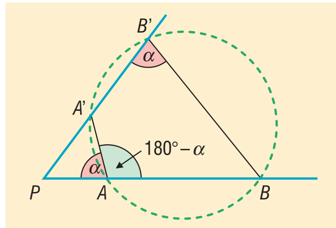
Az utolsó két egyenlőség bal oldalán álló mennyiségek megegyeznek, így jobb oldaluk is egyenlő:

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BB_1 \cdot BA}{CC_1 \cdot CA}, \quad \text{amiből} \quad 1 = \frac{BB_1}{CC_1}.$$

Az utóbbi épp a bizonyítandó állítással egyenértékű.

Hasonlóan bizonyítható, ha $AB < AC$.

2374 A feltételek szerint $\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}$, ami azt is jelenti, hogy a PAA' és $PB'B$ háromszögekben a P-nél lévő szög, valamint a szöget közrefogó két-két oldal aránya megegyezik, azaz a két háromszög hasonló egymáshoz. Ekkor persze az egymásnak megfelelő szögek is megegyeznek, azaz $A'AP\sphericalangle = BB'P\sphericalangle = \alpha$. Az $A'AB\sphericalangle$ külső szöge a PAA' háromszögnek, ezért $A'AB\sphericalangle = 180° - \alpha$. Most vizsgáljuk az $ABB'A'$ négyszöget: a négyszög A és B' csúcsainál lévő szögek összege 180º, ezért a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján a négyszög húrnégyszög. Ez a tulajdonsága igazolja, hogy csúcsai valóban egy körre illeszkednek.



A hasonlóság néhány alkalmazása a terület- és térfogatszámításban – megoldások

2375 *a)* A háromszög oldalaira $21^2 + 28^2 = 35^2$ teljesül, így Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű. Az átfogóhoz tartozó magasság két derékszögű háromszögre bontja az eredeti háromszöget, amelyekben a hegyesszögek páronként megegyeznek, ami igazolja, hogy a két háromszög hasonló egymáshoz.

b) A két háromszög hasonlóságának aránya $\frac{3}{4}$, így területük aránya $\frac{9}{16} = 0{,}5625$.

2376 A hatszög területe a háromszög alakú virágágyás területének $\frac{2}{3}$ része.

2377 A körök sugarai az egyes esetekben:

a) $\frac{20}{11} \approx 1{,}82$ cm; $\frac{80}{11} \approx 7{,}27$ cm; $\frac{120}{11} \approx 10{,}91$ cm.

b) $\frac{20\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} \approx 5{,}50$ cm; $\frac{20\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} \approx 6{,}73$ cm; $\frac{40}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} \approx 7{,}77$ cm.

2378 A beírt sokszög minden esetben hasonló a kiindulásul vett sokszöghöz. A hasonlóság aránya a két sokszög oldalának arányával egyenlő.

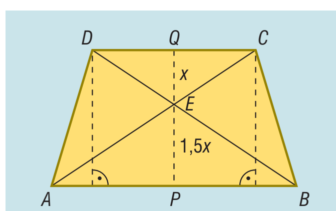
a) A hasonlóság aránya $1:2$, a két háromszög területének aránya $1:4$.

b) A hasonlóság aránya $\frac{1}{\sqrt{2}}$, a két négyzet területének aránya $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

c) A hasonlóság aránya $\frac{\sqrt{3}}{2}$, a két hatszög területének aránya $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

2379 *a)* Az ABE és a CDE háromszögek hasonlók egymáshoz, a hasonlóság aránya $3:2$. A két háromszög területének aránya $9:4$.

b) Jelöljük a CDE háromszög CD oldalához tartozó EQ magasságot x-szel. Ekkor az ABE háromszög AB oldalához tartozó EP magasság $1{,}5\cdot x$, a trapéz magassága pedig $2{,}5\cdot x$. A trapéz területe ismert, ebből adódik, hogy $150 = \frac{18+12}{2}\cdot 2{,}5\cdot x$, és ezért $x = EQ = 4$ cm, $EP = 6$ cm. A CDE háromszög területe 24 cm^2, az ABE háromszög területe 54 cm^2.





c) Belátható, hogy az ABD, valamint ABC háromszögek területe egyenlő, ugyanis közös az AB oldaluk, valamint megegyezik az ehhez tartozó magasságuk. Ha mindkét háromszög területéből elvesszük a metszetük, vagyis az ABE háromszög területét, akkor a visszamaradó DAE, valamint BCE háromszögek területe is megegyezik. Ezek után a BCE és DAE háromszögek területe 36 cm^2.

2380 A hasonlóság aránya $\sqrt[3]{3{,}375} = 1{,}5$. Béla akváriumának méretei: 75 cm, 45 cm, 30 cm.

2381 A kétliteres palack kétszer olyan magas, mint a negyedliteres.

2382 *a)* A kisebb gúla térfogata a nagyobb gúla térfogatának $\frac{8}{125}$-szerese.

Mivel a két gúla hasonló egymáshoz, ezért a hasonlóság aránya:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5},$$

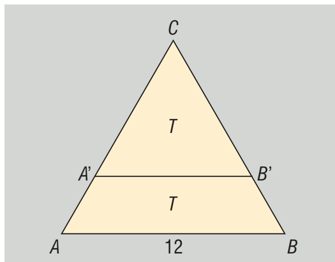
és így a kisebb gúla magassága:

$$\frac{2}{5} \cdot 15 = 6 \text{ cm}.$$

b) A kisebb gúla, valamint az eredeti gúla felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete, vagyis $\frac{4}{25} = 0{,}16$.

2383 A feltételek szerint az $A'B'C$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, és a két háromszög területének aránya $1:2$, így a hasonlóság aránya:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Az $A'B'C$ szabályos háromszög oldala: $12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$, ezért kerülete $18 \cdot \sqrt{2}$ cm.

Az $ABB'A'$ trapéz kerülete:

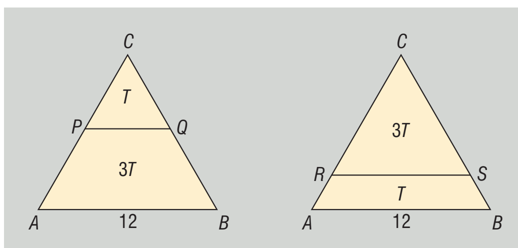
$$K = AB + 2 \cdot BB' + A'B' = 12 + 2 \cdot \left(12 - 6 \cdot \sqrt{2}\right) + 6 \cdot \sqrt{2} = 36 - 6 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}.$$

Az $A'B'C$ háromszög és az $ABB'A'$ trapéz kerületének aránya:

$$\lambda = \frac{18 \cdot \sqrt{2}}{36 - 6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{6 - \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(6 + \sqrt{2}\right)}{34} \approx 0{,}93.$$

2384 *a)* Két ilyen párhuzamos húzható.

b) Az ábra jelöléseit használva:

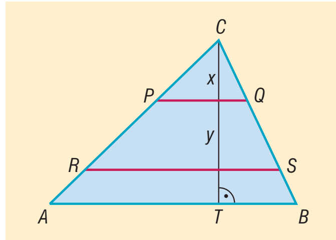


Előbb a PQ szakasz hosszát számoljuk. A PQC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, és a területük aránya $1:4$, így hasonlóságuk aránya $1:2$. Ebből következik, hogy a PQ szakasz hossza az AB szakasz hosszának fele, azaz 6 cm.

A második esetben az RSC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. Mivel a területük aránya $3:4$, így hasonlóságuk aránya: $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ebből következik, hogy a PQ szakasz hossza:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 6 \cdot \sqrt{3} \approx 10{,}39 \text{ cm}.$$

2385 Jelöljük az ábrának megfelelően a C-hez közelebbi út két végpontját P-vel és Q-val, a távolabbi út végpontjait R-rel és S-sel. Ekkor a PQC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, a területük aránya 0,16, és így a hasonlóság aránya $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$. Ha a PQ út C-től való távolságát x jelöli, akkor a két háromszög magasságának aránya $\frac{x}{500} = 0{,}4$, amiből $x = 200$ méter. A C-hez közelebbi út a C csúcstól 200 méterre halad.



Az RSC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, a területük aránya 0,84, így hasonlóságuk aránya $\sqrt{0{,}84} = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Ha az RSC háromszög magassága y, akkor a magasságok aránya $\frac{y}{500} = \frac{\sqrt{21}}{5}$, amiből $y = 100 \cdot \sqrt{21} \approx 458{,}26$ méter. A távolabbi út a C csúcstól 458,26 méterre halad.

2386 A kockacukros doboz egy $6 \times 6 \times 9$-es méretű téglatestnek tekinthető, amelybe összesen 324 darab cukor fér el. A feltételek szerint a dobozból már legalább egy cukor elfogyott, így a feladatnak a következő két megoldása van: a $2 \times 2 \times 3$-as, illetve $4 \times 4 \times 6$-os méretű téglatestek. Az előbbi esetben a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$, így a sértetlen dobozban lévő kockacukroknak $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$-szerese van a dobozban (vagyis összesen 12 darab), az utóbbi esetben pedig a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, így a dobozban a kockacukroknak $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$-szerese van (azaz összesen 96 darab).

2387 *a)* A két metszősík közül a gúla csúcsához közelebbi egy a kiindulási gúlához hasonló gúlát metsz ki. A két gúla térfogatának aránya $1:3$, így hasonlóságuk aránya $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. Ebből következően a kisebb gúla magassága $m_1 = 18 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \approx 12{,}5$ cm.

Az eredeti gúla csúcsától távolabbi párhuzamos által levágott gúla szintén hasonló az eredeti gúlához, a térfogatuk aránya ezúttal $2:3$, így hasonlóságuk aránya $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, ezért a sík a gúla csúcsától $m_2 = 18 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 15{,}7$ cm távolságra halad.

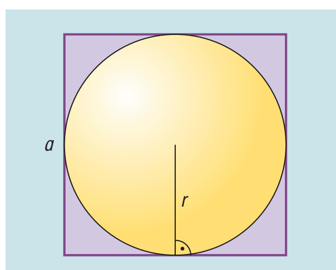
b) A keletkező síkmetszetek az eredeti gúla alaplapjához hasonló síkidomok. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért a két keletkező síkidom területe:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot 30 \approx 14{,}4 \text{ cm}^2, \quad \text{illetve} \quad \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot 30 \approx 22{,}9 \text{ cm}^2.$$

2388 *a)* A doboz keresztmetszetét az ábra mutatja: látható, hogy a doboz minden lapja olyan négyzet, amelynek a oldala a földgömb r sugarának kétszerese.

Ezek alapján a 10 000 doboz elkészítéséhez szükséges karton mennyisége:

$$A = 10\,000 \cdot 6 \cdot (2r)^2 = 10\,000 \cdot 6 \cdot 0{,}64^2 = 24\,576 \text{ m}^2.$$





b) Ha a gömbök sugarát 24 cm-re csökkentik, akkor az új földgömbök az eredetihez hasonlók lesznek, hasonlóságuk aránya pedig a sugarak arányával egyenlő, azaz:

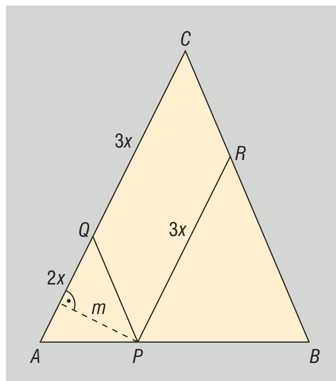
$$\lambda = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Ugyanez érvényes a csomagoláshoz felhasznált dobozokra is. Mivel a hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért a szükséges karton mennyisége a földgömb sugarának csökkentése után $\lambda^2 = \frac{9}{16}$-szorosára változik (13 824 m^2-re).

c) Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő, ezért az új földgömbök tárolásához $\lambda^3 = \frac{27}{64}$-szer akkora raktár szükséges, mint az eredeti dobozok tárolásához. Mivel $\frac{27}{64} < \frac{1}{2}$, ezért valóban elég egy feleakkora raktár.

2389 Az ABC háromszög AB oldalának P pontján át húzott párhuzamosok a megfelelő oldalakat Q-ban és R-ben metszik az ábra szerint. Ekkor a $PRCQ$ négyszög paralelogramma, hiszen szemközti oldalai párhuzamosak. Az APQ és PBR háromszögek hasonlók egymáshoz, hiszen szögeik páronként megegyeznek, továbbá a területük aránya $4:9$, így hasonlóságuk aránya $2:3$. Ez azt is jelenti, hogy ha $AQ = 2 \cdot x$, akkor a megfelelő PR szakaszra $PR = 3 \cdot x$, és így a paralelogramma szemközti CQ oldalára is $CQ = 3 \cdot x$ teljesül. Jelöljük az APQ háromszög AQ oldalához tartozó magasságát m-mel, ekkor a háromszög területére igaz, hogy:

$$4 = \frac{(2x) \cdot m}{2} = x \cdot m.$$



Mivel m egyben a $PRCQ$ paralelogramma CQ oldalához tartozó magassága is, ezért a paralelogramma területe:

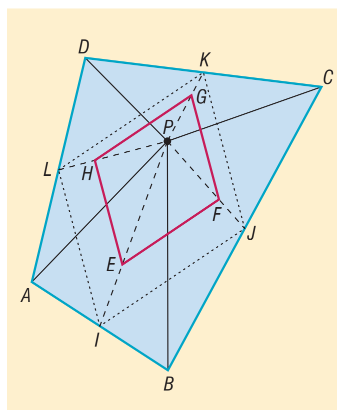
$$t = (3x) \cdot m = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2.$$

Az ABC háromszög területe tehát 25 cm^2.

2390 *a)* Az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjait az ábrának megfelelően I, J, K és L jelöli. Vegyük észre, hogy az E, F, G és H súlypontok rendre $2:1$ arányban osztják a megfelelő háromszögben kialakuló PI, PJ, PK, illetve PL súlyvonalakat. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $IJKL$ négyszöget a P pontra vonatkozó, $\lambda = \frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság az $EFGH$ négyszögbe viszi át.

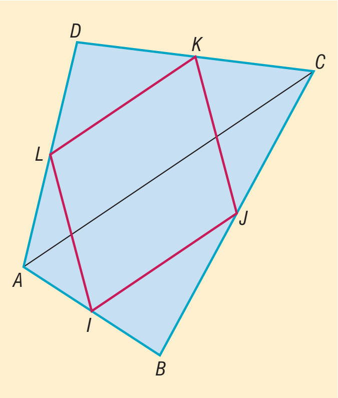
Mivel a középpontos hasonlóságban szakasz és képe párhuzamos, ezért az $EFGH$ négyszög oldalai párhuzamosak az $IJKL$ négyszög megfelelő oldalaival.

Ismert, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai középpontosan szimmetrikus négyszöget, azaz paralelogrammát alkotnak. Eszerint az $IJKL$ négyszög, és ebből adódóan az $EFGH$ négyszög is paralelogramma.





b) Előbb az *IJKL* és az *ABCD* négyszögek területének arányát számoljuk. Húzzuk be az *AC* átlót. Mivel *I* és *J* felezőpontok, ezért az *IJ* középvonala az *ABC* háromszögnek. Emiatt az *IJ* párhuzamos *AC*-vel és hossza az *AC* hosszának fele. Ebből következik, hogy az *IJB* háromszög hasonló az *ACB* háromszöghöz, és a hasonlóság aránya 1 : 2, ezért területükre:



$$\frac{T_{IJB}}{T_{ACB}} = \frac{1}{4}, \quad \text{amiből} \quad T_{IJB} = \frac{1}{4} \cdot T_{ACB}.$$

Ugyanez érvényes az *LKD* és *ACD* háromszögekre is, azaz:

$$T_{LKD} = \frac{1}{4} \cdot T_{ACD}.$$

A két utolsó egyenlőség megfelelő oldalait összeadva:

$$T_{IJB} + T_{LKD} = \frac{1}{4} \cdot \left(T_{ACB} + T_{ACD}\right) = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}.$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$T_{ILA} + T_{JKC} = \frac{1}{4} \cdot \left(T_{BDA} + T_{BDC}\right) = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}.$$

Ha a kapott egyenlőségek megfelelő oldalait összeadjuk, akkor láthatjuk, hogy az *IJKL* paralelogramma oldalaira emelt *IJB*, *JKC*, *LKD*, *ILA* háromszögek területének összege az *ABCD* négyszög területének felével egyenlő. Ebből adódóan az *IJKL* négyszög területe is az *ABCD* négyszög területének felével egyenlő.

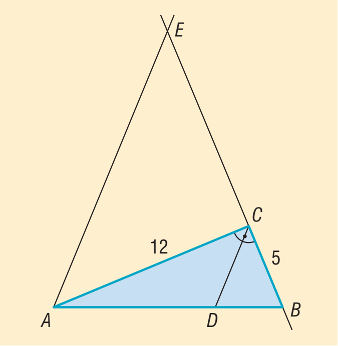
Korábban már láttuk, hogy az *EFGH* és az *IJKL* négyszögek hasonlók egymáshoz, a hasonlóság aránya pedig $\frac{2}{3}$, így területük arányára igaz, hogy:

$$\frac{T_{EFGH}}{T_{IJKL}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$T_{EFGH} = \frac{4}{9} \cdot T_{IJKL} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot T_{ABCD} = \frac{2}{9} \cdot T_{ABCD}.$$

Az *EFGH* és az *ABCD* négyszögek területének aránya tehát $\frac{2}{9}$.

2391 *a)* A szögfelezőtétel alapján:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{12}{5}.$$

Másrészt ha a párhuzamos szelők tételét az *ABE*∢-re alkalmazzuk, akkor kapjuk:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{5}.$$

Mivel a két egyenlőség bal oldala megegyezik, ezért a jobb oldalak is egyenlők egymással, amiből $EC = 12$ cm adódik, így az *AEC* háromszög valóban egyenlő szárú.



b) Jelöljük a *DCB* háromszög területét *T*-vel. Az *AEB* és a *DCB* háromszög hasonló továbbá a hasonlóság aránya $\frac{EB}{CB}=\frac{17}{5}$, ezért a területük aránya $\left(\frac{17}{5}\right)^2$, azaz $t_{AEB}=\frac{289}{25}\cdot T$.

Az *AECD* négyszög területe:

$$t_{AECD}=t_{AEB}-t_{DCB}=\frac{289}{25}\cdot T-T=\frac{264}{25}\cdot T.$$

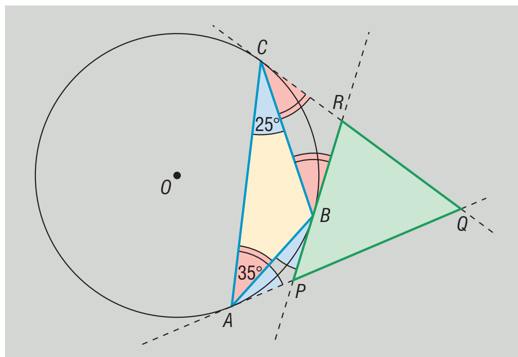
Mivel az egyenlő szárú és derékszögű *AEC* háromszög befogója 12 cm, ezért területe 72 cm^2, így $t_{ACD}=\frac{264}{25}\cdot T-72$. Az *ACD*, valamint a *DCB* háromszög *AD*, valamint *DB* oldalaihoz ugyanakkora magasság tartozik, ezért területük aránya az *AD*, illetve a *DB* oldalak arányával egyenlő, azaz

$$\frac{t_{ACD}}{t_{DCB}}=\frac{AD}{DB},\quad \text{azaz}\quad \frac{\frac{264}{25}\cdot T-72}{T}=\frac{12}{5},\quad \text{amiből}\quad T=\frac{150}{17}\approx 8{,}82\text{ cm}^2.$$

Az *AECD* négyszög területe $t_{AECD}=\frac{264}{25}\cdot T=\frac{1584}{17}\approx 93{,}18\text{ cm}^2$.

Vegyes feladatok I. – megoldások

2392 Tegyük fel, hogy az *ABC* háromszög szögei: $BAC\sphericalangle=35°$, $BCA\sphericalangle=25°$, továbbá a háromszög csúcsaiban a köré írt körhöz húzott érintők az ábra szerint a *PQR* háromszöget fogják közre.



a) A feladat megoldása szempontjából a legfontosabb érintőszárú kerületi szögek:

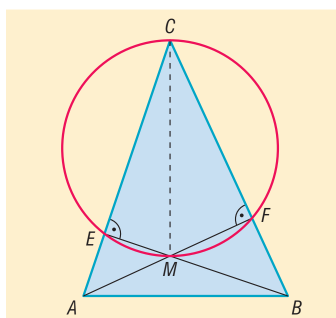
– a rövidebb *BC* köríven: $CBR\sphericalangle$ és $BCR\sphericalangle$;

– a rövidebb *AB* köríven: $BAP\sphericalangle$ és $ABP\sphericalangle$.

További érintő szárú kerületi szögek nyugszanak a hosszabb *BC* és *AB* köríveken, valamint mindkét *AC* köríven.

b) Az ugyanazon köríven nyugvó kerületi szögek egyenlősége alapján, az ábrán azonos módon megjelölt szögek egymással egyenlők, így $CAQ\sphericalangle=QCA\sphericalangle=35°+25°=60°$, amiből következik, hogy az *AQC* háromszög szabályos, és ezért az $AQC\sphericalangle=PQR\sphericalangle=60°$. Mivel az $RPQ\sphericalangle$ az *APB* háromszög egyik külső szöge, ezért a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, és így az $RPQ\sphericalangle=2\cdot 25°=50°$. Hasonlóan kiszámolható, hogy a $PRQ\sphericalangle=2\cdot 35°=70°$. Így a *PQR* háromszög szögei: 50°, 60°, 70°.

2393 Mivel a magasságvonal merőleges arra az oldalra, amelyikhez tartozik, ezért a *CFME* négyszögben az *E* és *F* csúcsoknál derékszögek vannak. Ebből következően a négyszög két szemközti szögének összege 180°, ami mutatja, hogy a *CFME* négyszög valóban húrnégyszög. A *CFM* (vagy a *CEM*) háromszögre alkalmazva Thalész tételének megfordítását láthatjuk, hogy a négyszög köré írt kör középpontja a *CM* átló felezőpontjával esik egybe. (➡)



2394 A keletkező négyszög húrnégyszög.

2395 A keletkező négyszög húrnégyszög. Mivel minden szöge 90°-os, ezért a négyszög téglalap is egyben.

2396 *a)* A trapéz átlói $1:3$ arányban osztják egymást, és természetesen a rövidebb szakasz a rövidebb alaphoz illeszkedik.

b) Az átlók közé eső szakasz hossza 10 cm.

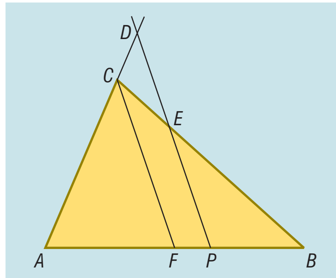
2397 A behúzott szakasz a BD átlót $2:1$ arányban osztja.

2398 Mivel a DP egyenes párhuzamos a háromszög CF súlyvonalával, ezért AFC és APD háromszögek, továbbá BPE és BFC háromszögek hasonlók egymáshoz. A megfelelő háromszögekben:

$$\frac{PD}{CF}=\frac{AP}{AF}, \quad \text{továbbá} \quad \frac{PE}{CF}=\frac{PB}{FB}.$$

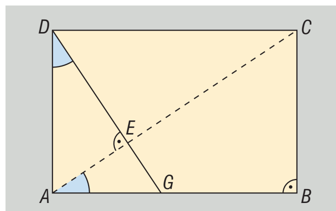
A két egyenlőség megfelelő oldalait összeadva megkapjuk, hogy:

$$\frac{PD}{CF}+\frac{PE}{CF}=\frac{AP}{AF}+\frac{PB}{FB}=2.$$



Az utolsó egyenlőségnél csak azt kell észrevenni, hogy F az AB oldal felezőpontja, így $AF=FB$, továbbá $AP+PB=AB=2\cdot FB$. Átrendezés után valóban azt kapjuk, hogy $PD+PE=2\cdot CF$.

2399 *a)* Vegyük észre, hogy az $ADE\sphericalangle$, valamint a $BAC\sphericalangle$ szárai páronként merőlegesek egymásra, így vagy megegyeznek, vagy 180°-ra egészítik ki egymást (merőleges szárú szögek). Mivel mindkettő hegyesszög, ezért csak egyenlők lehetnek. Ekkor viszont az ADE, GDA és CAB derékszögű háromszögekben egy-egy hegyesszög is megegyezik, ami igazolja, hogy a háromszögek hasonlók egymáshoz.

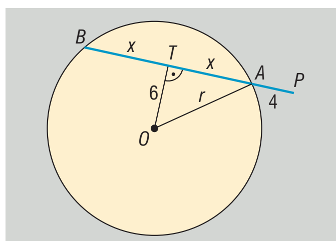


b) Az ADE háromszög oldalai:

$$AD=6\text{ cm},\quad AE=\frac{12\cdot\sqrt{13}}{13}\approx 3{,}33\text{ cm},\quad DE=\frac{18\cdot\sqrt{13}}{13}\approx 4{,}99\text{ cm}.$$

A GDA háromszög oldalai: $AG=4$ cm, $AD=6$ cm, $GD=2\cdot\sqrt{13}\approx 7{,}21$ cm.

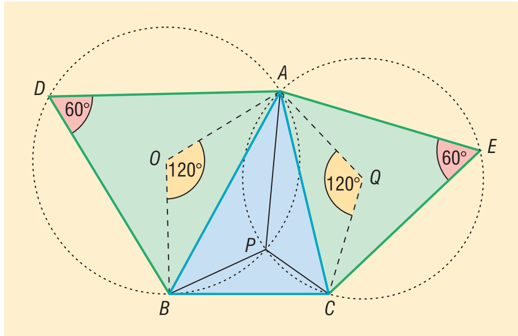
2400 Az ábra jelöléseit használva $PA=4$ cm, $OT=6$ cm, $r=10$ cm. Az OTA derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy $x=8$ cm, így az AB húr hossza 16 cm. A P pontból húzott szelők szeletei $PA=4$ cm, $PB=20$ cm, így az érintő és szelőszakaszok tételét alkalmazva kapjuk, hogy a P pontból húzott érintőszakaszok hossza $\sqrt{80}\approx 8{,}94$ cm.



2401 Jelöljük a négyszög legkisebb szögét α-val, ekkor a legnagyobb szög $\alpha+140°$. Ha a másik két szög közül a kisebbet β jelöli, akkor a nagyobb szög $\frac{3}{2}\cdot\beta$. Világos, hogy α és β nem lehetnek szemközti szögek, hiszen így a szemközti szögek összege semmiképpen nem lehet egyenlő egymással. Ezért az alábbi esetek valamelyike teljesül:

1. α és $\frac{3}{2}\cdot\beta$ szemközti szögek. Ekkor $\alpha+\frac{3}{2}\cdot\beta=180°$, továbbá $(\alpha+140°)+\beta=180°$. Ebben az esetben α-ra negatív érték adódik, ami mutatja, hogy ez az eset szintén nem valósulhat meg.
2. α és $\alpha+140°$ szemközti szögek. Ekkor $\alpha+(\alpha+140°)=180°$, továbbá $\beta+\frac{3}{2}\cdot\beta=180°$, és így a négyszög szögei: 20°, 72°, 160°, 108°.

2402 *a)* Az ábra jelöléseinek megfelelően az AB oldalra rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsát D, az ABD háromszög köré írt kör középpontját O, továbbá az AC oldalra rajzolt háromszög harmadik csúcsát E, az ACE háromszög köré írt kör középpontját Q jelöli.



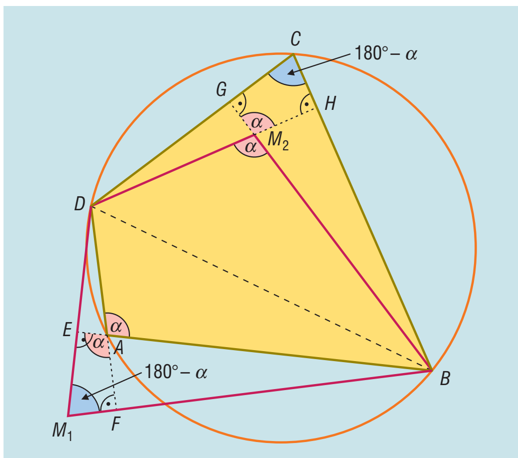
Az O középpontú körben alkalmazva a kerületi és középponti szögek tételét láthatjuk, hogy a konvex $AOB\sphericalangle$ 120°-os, amiből következik, hogy a hosszabb AB körívén nyugvó konkáv szög 240°-os. Mivel az $APB\sphericalangle$ e körben a hosszabb AB íven nyugvó kerületi szög, ezért az $APB\sphericalangle = 120°$.

A Q középpontú körben alkalmazott hasonló gondolatmenettel láthatjuk be, hogy $APC\sphericalangle = 120°$ is teljesül. Ez azt is jelenti, hogy a P pontból a háromszög AB, valamint AC oldala, és ebből kifolyólag a BC oldala is 120°-os szög alatt látszik.

b) Ha a BC oldal fölé rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsa F, akkor az *a)* részfeladat eredménye alapján láthatjuk, hogy $BPCF$ húrnégyszög, így található olyan kör, amelyre a négyszög minden csúcsa illeszkedik. Természetesen ez a kör tartalmazza a B, C, F csúcsokat, amiből következik, hogy éppen a BCF háromszög köré írt körről van szó.

Megjegyzés: A P pontot az ABC háromszög izogonális pontjának nevezzük. Az izogonális pont egy nevezetes szélsőérték-feladat megoldásaként is ismert: megmutatható, hogy ha ezt a pontot a háromszög csúcsaival összekötjük, akkor a keletkező szakaszok hosszának összege a lehető legkisebbnek adódik.

2403 Ha az $ABCD$ húrnégyszög A és C csúcsánál derékszögek vannak, akkor a feladat állítása könnyen igazolható, hiszen ebben az esetben az ABD, illetve a CBD háromszögek magasságpontja az A, illetve a C csúcsba esik, így a két magasságpont a BD átló végpontjaival valóban húrnégyszöget alkot, amely egybeesik az $ABCD$ négyszöggel.



Ha az A és C csúcsoknál nem derékszögek vannak, és α jelöli a négyszög A csúcsánál lévő szöget, akkor a $DCB\sphericalangle = 180° - \alpha$. Az ábra jelöléseinek megfelelően legyen az ABD háromszög magasságpontja M_1, megfelelő magasságainak talppontjai pedig E és F. A CBD háromszög magasságpontját M_2, míg megfelelő magasságainak talppontját G és H jelölje. Ekkor megfigyelhetjük, hogy az AEM_1F négyszögben a két szemközti szög derékszög, így a négyszög húrnégyszög, amiből következik, hogy:

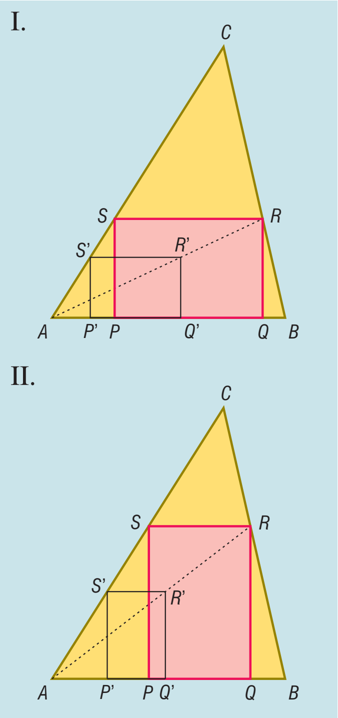
$$EM_1F\sphericalangle = 180° - EAF\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy az A csúcsnál kialakuló szögek csúcsszögek, amik közismerten megegyeznek. Ugyanilyen gondolatmenettel a CGM_2H is húrnégyszög, és ezért $GM_2H\sphericalangle = \alpha$, amiből $DM_2B\sphericalangle = \alpha$ adódik.

Eredményeinket összefoglalva láthatjuk, hogy az M_1BM_2D négyszögben a két szemközti szög összege 180°, azaz valóban húrnégyszögről van szó.

2404 A feladat megoldása előtt érdemes egy egyszerűbb feladatot megoldani: szerkesszünk olyan $P'Q'R'S'$ téglalapot, amelynek $P'Q'$ oldala az ABC háromszög AB oldalára, S' csúcsa az AC oldalára illeszkedik, továbbá $P'Q' : P'S' = 3 : 2$. Ilyen tulajdonságú téglalap valóban könnyen szerkeszthető, hiszen ha az AC oldal egy tetszőleges S' pontjából merőlegest állítunk az AB oldalra, akkor e merőleges talppontjaként megkapjuk a P' pontot, majd a $P'S'$ szakasz felét háromszor felmérve az AB oldalra megkapjuk a Q' pontot. Az R' pont ezután már szerkeszthető. Az eredeti feladat megoldásához azt kell észrevennünk, hogy bármely két olyan téglalap hasonló egymáshoz, amelyben az oldalak aránya $3 : 2$, így a feladat minden feltételének eleget tevő $PQRS$ téglalap is hasonló a $P'Q'R'S'$ téglalaphoz. A megfelelő R pont az AR' félegyenes, valamint a BC oldal metszéspontjaként szerkeszthető. A téglalap további csúcsai már értelemszerűen szerkeszthetők (I.).

Vegyük észre, hogy még egy olyan téglalap szerkeszthető, amelynek PQ oldala az AB oldalra, R és S csúcsai pedig a háromszög további oldalaira esnek (II.). Ebben a téglalapban $PQ : RS = 2 : 3$.



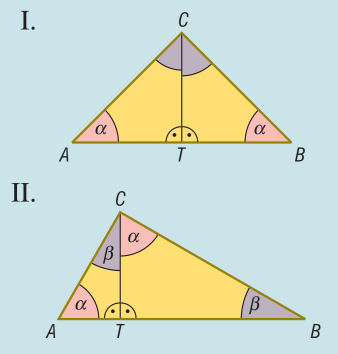
2405 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben a CT magasság a háromszöget két hasonló háromszögre bontja. Hasonló háromszögekben a szögek páronként egyenlők, továbbá a T csúcsnál mindkét részháromszögben derékszög van, ezért két eset lehetséges:

I. Az ATC, valamint a BTC háromszögekben a C csúcsnál ugyanakkora szögek vannak. Ebben az esetben természetesen a $CAT\sphericalangle = CBT\sphericalangle = \alpha$, ami igazolja, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú.

II. Az ATC háromszög C csúcsánál ugyanakkora szög van, mint a BTC háromszög B csúcsánál. Ez esetben $CAT\sphericalangle = BCT\sphericalangle = \alpha$, így az ábrán azonos módon jelölt szögek megegyeznek. Az ABC háromszög belső szögeinek összege:

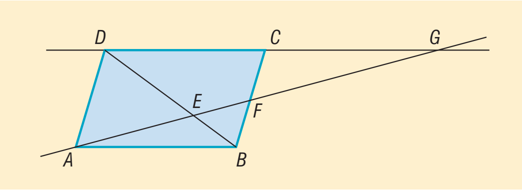
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°,$$

amiből $\alpha + \beta = 90°$, vagyis a háromszög C csúcsánál derékszög van.



2406 *a)* Az AED háromszöghöz hasonló az FEB háromszög, mivel az E csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek, a D és B csúcsnál lévők pedig váltószögek, így az említett szögek páronként megegyeznek.

b) A GDE háromszög hasonló az ABE háromszöghöz, mert az E csúcsnál csúcsszögek vannak, a G és A csúcsoknál lévő szögeik pedig váltószögek.





c) Az AED és FEB háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{AE}{EF} = \frac{DE}{EB}.$$

Az ABE és GDE háromszögek hasonlósága alapján:

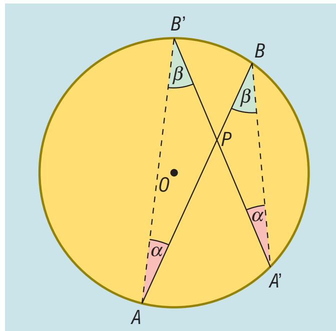
$$\frac{EG}{AE} = \frac{DE}{EB}.$$

Mivel a két egyenlőség jobb oldalán ugyanaz a tört áll, ezért a bal oldalak is megegyeznek, amit átrendezve éppen a bizonyítandó $AE^2 = EF \cdot EG$ egyenlőséget kapjuk.

2407 *a)* Húzzuk be az AB' és $A'B$ szakaszokat. Ekkor az ábrán azonos módon megjelölt szögek ugyanazon a köríven nyugszanak, így a kerületi szögek tétele alapján megegyeznek. Ebből következően az APB' és $A'PB$ háromszögekben a szögek megegyeznek, és ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB}.$$

Az egyenlőséget átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk.

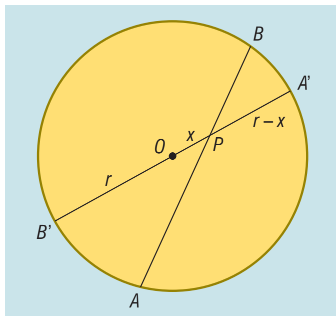


b) Az *a)* részfeladat eredménye alapján a $PA \cdot PB$ szorzat értéke a P-n átmenő húr helyzetétől függetlenül állandó. Vegyük ezért a P és O pontokon átmenő $A'B'$ húrt (ld. ábra). Ekkor

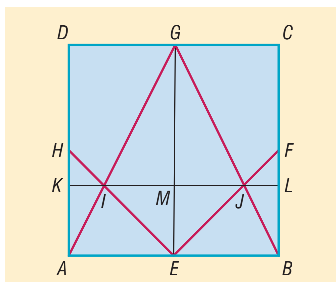
$$PA' = r - x, \text{ míg } PB' = r + x,$$

és így:

$$PA \cdot PB = (r - x) \cdot (r + x) = r^2 - x^2.$$



2408 *a)* Használjuk az ábra jelöléseit. A HAI háromszög hasonló az EGI háromszöghöz, hiszen az I csúcsnál csúcsszögek vannak, továbbá váltószögek lévén $AHI\sphericalangle = GEI\sphericalangle$, és így a két háromszög megfelelő szögei megegyeznek. A hasonlóság aránya az egymásnak megfelelő AH és GE oldalak arányával egyenlő, ami a feltételek szerint $\frac{1}{2}$. Ebből adódóan persze $IM = 2 \cdot IK$, és ehhez hasonlóan $MJ = 2 \cdot JL$. Egyszerű számolás mutatja, hogy $IK = \frac{a}{6}$, ahol a az $ABCD$ négyzet oldalának hossza.



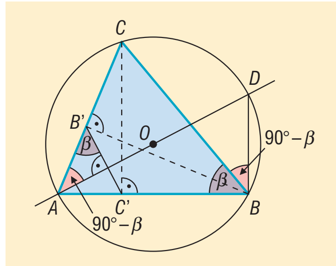
Ekkor viszont a HAI háromszög területe $T_{AHI} = \frac{a^2}{24}$, a hozzá hasonló EGI háromszög területe $T_{EGI} = 4 \cdot T_{AHI} = \frac{a^2}{6}$, és így az $EJGI$ sárkány területe $T_{EJGI} = \frac{a^2}{3}$.

A sárkány területe a kartonlap területének 33,33%-a.

b) A sárkány területe 3 m^2.



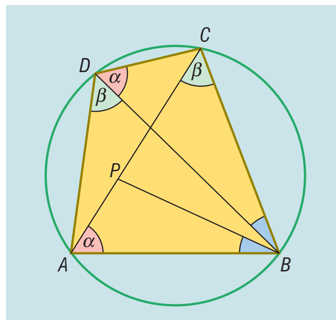
2409 A $BCB'C'$ négyszög húrnégyszög, hiszen a BC oldal a B' és C' csúcsokból egyaránt derékszög alatt látszik, így mindkét pont illeszkedik a BC szakasz Thalész-körére. Ekkor viszont ha az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöget β jelöli, úgy $CB'C'\sphericalangle = 180° - \beta$, amiből következik, hogy $AB'C'\sphericalangle = \beta$ is teljesül. Jelöljük D-vel az A csúcsból a $B'C'$ egyenesre állított merőlegesnek az ABC háromszög köré írt körrel való másik metszéspontját. Mivel az AD egyenes az $AC'B'$ háromszög $B'C'$ oldalához tartozó magasságvonala, ezért $B'AD\sphericalangle = 90° - \beta$, amit úgy is értelmezhetünk, hogy az ABC háromszög köré írt körében a CD köríven $90° - \beta$ nagyságú kerületi szög nyugszik. A kerületi szögek tétele alapján $CBD\sphericalangle = 90° - \beta$ szintén teljesül. Tekintsük most az ABD háromszöget. A B csúcsnál lévő szögre igaz, hogy:



$$ABD\sphericalangle = ABC\sphericalangle + CBD\sphericalangle = \beta + 90° - \beta = 90°,$$

így a háromszög derékszögű. Ebből az is következik, hogy a köré írt körének O középpontja egybeesik az AD szakasz felezőpontjával. Mivel az O pont egyben az ABC háromszög köré írható körének középpontja is, ezért a feladat állítását igazoltuk.

2410 *a)* Az ábrán azonos módon jelölt szögek a kerületi szögek tétele alapján megegyeznek, hiszen az α-val jelölt szögek az $ABCD$ négyszög köré írt körben a (rövidebb) BC köríven, a β-val jelölt szögek pedig a (szintén rövidebb) AB köríven nyugvó kerületi szögek. Ebből adódóan a BPA háromszög két szöge megegyezik a BCD háromszög két szögével, így a két háromszög hasonló egymáshoz.



A feltételek szerint:

$$ABD\sphericalangle = ABP\sphericalangle + PBD\sphericalangle =$$
$$= CBD\sphericalangle + DBP\sphericalangle = CBP\sphericalangle,$$

ezért az ABD háromszög két szöge megegyezik a PBC háromszög két szögével, így a két háromszög szintén hasonló egymáshoz. Ezzel igazoltuk, hogy a BP szakasz az ABC háromszöget két olyan részre vágja szét, amelyek közül a BPA háromszög a BCD háromszöghöz, a PBC háromszög pedig az ABD háromszöghöz hasonló.

b) A BPA és BCD háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BD}{DC},$$
$$AB \cdot DC = BD \cdot AP. \quad (1)$$

Az ABD és PBC háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{PC}{BC},$$
$$AD \cdot BC = BD \cdot PC. \quad (2)$$

Az (1) és (2) összefüggések megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = BD \cdot AP + BD \cdot PC =$$
$$= BD \cdot (AP + PC) = BD \cdot AC.$$

A kapott egyenlőség szerint a húrnégyszög szemközti oldalainak szorzatösszege megegyezik az átlók szorzatával.

Távolságok meghatározása hasonlóság segítségével, hegyesszögek szögfüggvényei – megoldások

2411 Az épületek magassága: *a)* 40; *b)* 64; *c)* 112 méter.

2412 A felvonó megközelítőleg 294 m magasra visz.

2413 A padlástér legnagyobb magassága 7,5 m.

2414 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\beta$
9 cm	40 cm	41 cm	$\frac{9}{41}$	$\frac{40}{41}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{40}{41}$	$\frac{9}{41}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{9}{40}$
12 m	35 m	37 m	$\frac{12}{37}$	$\frac{35}{37}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{35}{12}$	$\frac{35}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{35}{12}$	$\frac{12}{35}$
33 dm	56 dm	65 dm	$\frac{33}{65}$	$\frac{56}{65}$	$\frac{33}{56}$	$\frac{56}{33}$	$\frac{56}{65}$	$\frac{33}{65}$	$\frac{56}{33}$	$\frac{33}{56}$
2,1 km	5,4 km	5,79 km	0,3627	0,9326	0,389	2,571	0,9326	0,3627	2,571	0,389
$x-y$	$2\cdot\sqrt{x\cdot y}$	$x+y$	$\frac{x-y}{x+y}$	$\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x+y}$	$\frac{x-y}{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}$	$\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x-y}$	$\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x+y}$	$\frac{x-y}{x+y}$	$\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x-y}$	$\frac{x-y}{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}$

2415 A szerkesztés a definíció alapján történhet. A feladatokban szereplő, a hosszegységgel össze nem mérhető szakaszokat a magasságtétel felhasználásával szerkeszthetjük.

2416 A keresett szögfüggvények értékeit a következő táblázatban láthatjuk:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
78°54’	0,9813	0,1925	5,0970	0,1962
28°12’	0,4726	0,8813	0,5362	1,8650
13°41’	0,2366	0,9716	0,2435	4,1074
54,6°	0,8151	0,5793	1,4071	0,7107
36,8°	0,5990	0,8007	0,7481	1,3367
47,4°	0,7361	0,6769	1,0875	0,9195
$\frac{\pi}{10}$	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777
$\frac{\pi}{18}$	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713
$\frac{2\pi}{5}$	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249

2417 $\alpha = 4,75°;\ 51,66°;\ 33,24°.$ $\beta = 62,02°;\ 28,92°;\ 15,8°.$
$\gamma = 66,08°;\ 77,03°;\ 28,1°.$ $\delta = 70,44°;\ 16,14°;\ 35,6°.$

2418 A helyesen kitöltött táblázat (➡):

a	b	c	α	β
41 cm	13 cm	43,01 cm	72,41°	17,59°
50,6 cm	12 cm	52 cm	76,66°	13,34°
10 dm	47,05 dm	48,1 dm	12°	78°
9,36 m	12,98 m	16 m	35°48’	54°12’
$c\cdot\sin\alpha$	$c\cdot\cos\alpha$	c	α	$90°-\alpha$

2419 A lehajtó 2,34 m mélyre visz.

2420 A lejtő megközelítőleg 42,5 m magasra visz.

2421 Az út hossza megközelítőleg 2518 méter.

2422 A napsugarak a talajra 53,13°-ban érkeznek.

2423 Egy csavarmenet 2,47 mm magas.

2424 A templom toronyóráját 55,22° emelkedési szögben látjuk.

2425 A folyó megközelítőleg 113 m széles.

2426 Az énekes 41 méter távol van.

2427 A létra alja a faltól legfeljebb 1,22 m távolságra lehet.

2428 Ha a háromszög átfogója c, akkor a befogói $c\cdot\sin 50°$, illetve $c\cdot\cos 50°$. Mivel a kerület 70 cm, felírható:

$$c + c\cdot\sin 50° + c\cdot\cos 50° = 70.$$

Így az átfogó hossza:

$$c=\frac{70}{1+\sin 50°+\cos 50°}\approx 29{,}06\,.$$

A háromszög oldalai 29,06 cm, 22,26 cm és 18,68 cm hosszúak.

2429 Mivel a hegyesszög szinusza $\frac{5}{13}$, a szöggel szemben lévő befogó és az átfogó aránya $5:13$.

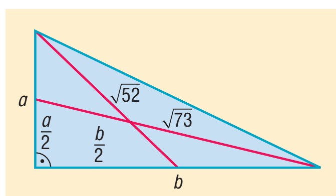
Legyen az átfogó $13x$, a szöggel szemben lévő befogó $5x$ hosszúságú. A másik befogó hossza Pitagorasz tétele alapján $12x$ hosszúságú.

a) A hegyesszög koszinusza $\frac{12}{13}$.

b) A háromszög területe: $\frac{5x\cdot 12x}{2}=1{,}2\Rightarrow x^2=0{,}04\Rightarrow x=0{,}2.$

A háromszög oldalainak hossza tehát 1 m, 2,4 m és 2,6 m.

2430 Legyenek a derékszögű háromszög befogói a illetve b hosszúságúak. Mivel az egy csúcsból kiinduló súlyvonal felezi a szemközti oldalt, az ábra alapján felírhatók a következő Pitagorasz-tételek:



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2=73 \quad\text{és}\quad \left(\frac{b}{2}\right)^2+a^2=52.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $a=6$ és $b=8$.

Az a oldallal szemben levő α szögre tehát felírható, hogy $\operatorname{tg}\alpha=\frac{6}{8}$, amiből $\alpha=36{,}87°$.

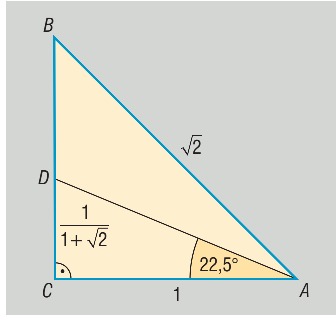
A háromszög hegyesszögei: 36,87° és 53,13°.

2431 Mivel egy racionális és egy irracionális szám hányadosa irracionális szám, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ irracionális szám.

Mivel két irracionális szám hányadosa lehet racionális és irracionális szám is, $\sin\alpha$ értékéről nem tudjuk eldönteni, hogy racionális vagy irracionális szám.



2432 Vegyünk fel egy egységnyi befogójú ABC egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek AB átfogója $\sqrt{2}$ hosszúságú.



Az A csúcsnál levő 45°-os hegyesszög szögfelezője a szemközti egységnyi befogót a szomszédos oldalak arányában, vagyis $1:\sqrt{2}$ arányban osztja.

A szögfelező és a BC befogó D metszéspontjának a derékszögű csúcstól vett távolsága: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ $(= DC)$.

Tekintsük az ADC derékszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge 22,5°.

A háromszögben a szöggel szemben levő befogó hossza $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, a szög melletti befogó hossza egységnyi.

Tehát $\operatorname{tg} 22{,}5° = \dfrac{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}{1} = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

2433 A két szöget tekinthetjük egy derékszögű háromszög két hegyesszögének.

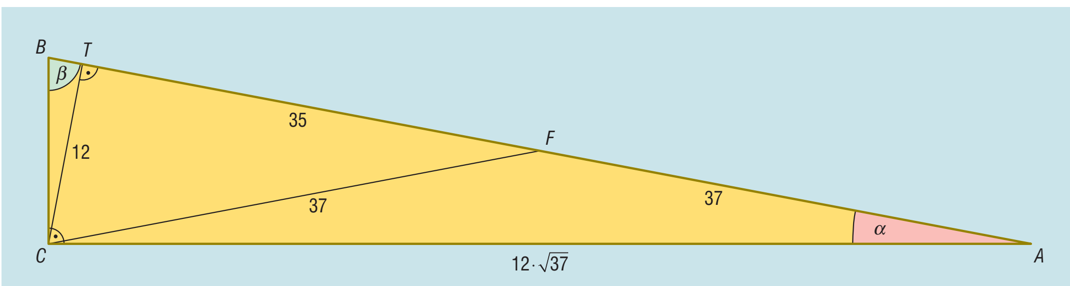
a) A háromszög hasonlóságtól eltekintve egyértelműen adott, ezért vehetjük az átfogóját egységnyinek. Legyen a két befogó hossza a és b. A Pitagorasz-tétel alapján: $a^2 + b^2 = 1$. A feltétel szerint: $\dfrac{a}{1} - \dfrac{b}{1} = 0{,}2$.

Az egyenletrendszert megoldva: $a = 0{,}8$ és $b = 0{,}6$.

$\sin\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \alpha \approx 53{,}13°$ és $\beta \approx 36{,}87°$.

b) A szögeket megszerkeszthetjük egy 3 és 4 egység befogójú derékszögű háromszög hegyesszögeiként.

2434 Az ABC háromszögben C-nél derékszög van. Az átfogóhoz tartozó magasság talppontja legyen T, az átfogó felezőpontja F. A háromszög a hasonlóságtól eltekintve egyértelműen meghatározott, ezért vehetjük a CT szakaszt 12, a CF szakaszt 37 egységnyinek.



Thalész tételének megfordítása alapján a derékszögű háromszög köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontja, $FA = FB = FC = 37$.

A CFT háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$TF = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35.$$

A CTA derékszögű háromszögben:

$$TC = 12 \text{ és } TA = 35 + 37 = 72.$$

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$CA = \sqrt{12^2 + 72^2} = \sqrt{5328} = 12\cdot\sqrt{37}.$$

A CTA derékszögű háromszögben:

$$\sin\alpha = \frac{12}{12\cdot\sqrt{37}} = \frac{1}{\sqrt{37}} = \frac{\sqrt{37}}{37}.$$

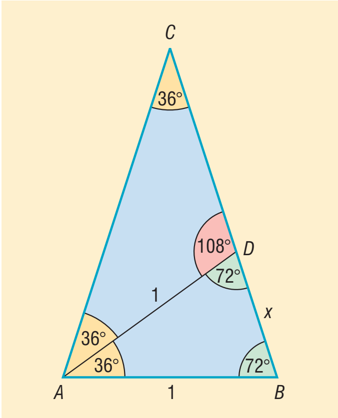
Az ABC háromszögben az előzőek alapján $CA = 12\cdot\sqrt{37}$, illetve $AB = 2\cdot 37 = 74$, vagyis:

$$\sin\beta = \frac{12\cdot\sqrt{37}}{74} = \frac{6\cdot\sqrt{37}}{37}.$$

Tehát a háromszögben a hegyesszögek szinuszai:

$$\frac{\sqrt{37}}{37} \text{ és } \frac{6\cdot\sqrt{37}}{37}.$$

2435 Vegyünk egy olyan ABC egyenlő szárú háromszöget, amelynek az AB alapon fekvő szögei 72°-osak. Az ábra szerint az A csúcsból kiinduló belső szögfelező két egyenlő szárú háromszögre bontja az ABC háromszöget. Legyen $AB = AD = DC = 1$, és $DB = x$. Az ABC, illetve a BDA háromszögek szögei páronként egyenlők, tehát $ABC\triangle \sim BDA\triangle$.



A két hasonló háromszögben a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{1}{x} = \frac{1+x}{1},$$

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Az x csak pozitív lehet, mivel szakasz hosszát jelöli, ezért:

$$DB = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Az ABD egyenlő szárú háromszög szárai 1, alapja x egység hosszú. Az alaphoz tartozó magasságot behúzva adódik, hogy:

$$\sin 18° = \frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Tehát $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

2436 A derékszögű háromszögben az egyik befogó 13 cm, a másik befogó hossza páratlan szám, tehát $2n + 1$ alakú (n természetes szám). A Pitagorasz-tétel alapján az átfogó:

$$\sqrt{(2n+1)^2+13^2} = \sqrt{4n^2+4n+1+169} = \sqrt{4n\cdot(n+1)+170}.$$

Indirekt úton bizonyítjuk, hogy az átfogó hossza irracionális szám.

Tegyük fel, hogy racionális, vagyis felírható $\frac{p}{q}$ alakban (p, q természetes szám):

$$\sqrt{4n\cdot(n+1)+170} = \frac{p}{q}.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve, majd q^2-tel beszorozva adódik:

$$[4n\cdot(n+1)+170]\cdot q^2 = p^2.$$

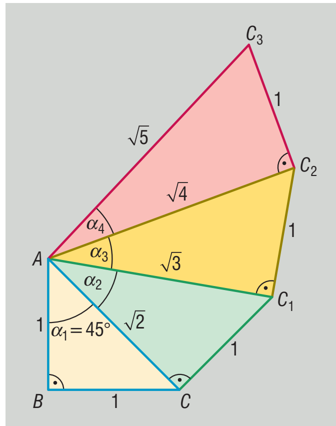
Az egyenlőség jobb oldalán p^2 prímtényezős felbontásában a 2 páros kitevőjű hatványon szerepel.

Az egyenlőség bal oldalán q^2 prímtényezős felbontásában a 2 páros kitevőjű hatványon szerepel, a $4n \cdot (n+1) + 170$ kifejezés 2-vel osztható, de 4-gyel nem, tehát az egyenlőség bal oldalának prímtényezős felbontásában a 2 hatványkitevője páratlan.

Az egyenlőség jobb, illetve bal oldalán a 2 hatványkitevője különböző paritású. Ez ellentmond a számelmélet alaptételének, vagyis az átfogó hossza nem lehet racionális szám, tehát az átfogó hossza irracionális szám.

2437 Az ABC, ACC_1, …, $AC_{n-2}C_{n-1}$ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján az $AC, AC_1, \dots, AC_{n-1}$ átfogók hossza rendre:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \dots,\ \sqrt{n}.$$



Ekkor felírható:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \dots + \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Az előző összegnek egyetlen tagja sem kisebb, mint $\frac{1}{\sqrt{n}}$, tehát

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} = \operatorname{ctg}\alpha_n.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $n = 1$.

Ezzel beláttuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \dots + \operatorname{tg}\alpha_n \geq \operatorname{ctg}\alpha_n$.

Összefüggések hegyesszögek szögfüggvényei között, nevezetes szögek szögfüggvényei – megoldások

2438 A kifejezések egyszerűbb alakjai:

a) $\sin\alpha$; *b)* $\sin^2\alpha$; *c)* 1; *d)* 1;
e) $\sin\alpha - \cos\alpha$; *f)* 1.

2439 Az *a)*, *b)* és *c)* részben a $\operatorname{ctg}\alpha$-t, illetve a $\operatorname{tg}\alpha$-t írjuk fel $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ segítségével, majd alakítsunk ki közös nevezőt. Használjuk fel, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

A *d)* részben felírhatjuk, hogy:

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 = \sin^6\alpha + 3\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha + 3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha + \cos^6\alpha =$$
$$= \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha).$$

Mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért:

$$1 = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha,$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőség.

2440 Használjuk a pótszögekre vonatkozó összefüggéseket:

a) 1; *b)* 1; *c)* 2.

2441 A kifejezések pontos értékei:

a) $\frac{3\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; *b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* 1; *d)* $\frac{\sqrt{3}}{8}$;
e) $\frac{1}{4}$; *f)* 1; *g)* 0.

2442 A helyesen kitöltött táblázat:

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$\sqrt{0{,}96} \approx 0{,}9798$	$0{,}2$	$\frac{\sqrt{0{,}96}}{0{,}2} \approx 4{,}899$	$\frac{0{,}2}{\sqrt{0{,}96}} \approx 0{,}2041$
$\frac{4}{\sqrt{17}}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	4	$0{,}25$
$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	3	$\frac{1}{3}$
a	$\sqrt{1-a^2}$	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
$\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\sqrt{b^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}$

2443 *a)* $\alpha > 45°$; *b)* $\alpha < 45°$.

2444 A kifejezések egyszerűbb alakjai:

a) $$\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

b) A 2439. feladat *d)* részéből:

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha,$$

valamint

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$

Ezeket felhasználva:

$$2\cdot(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3\cdot(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=$$
$$=2\cdot(1-3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)-3\cdot(1-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)=-1.$$

2445 A kifejezés értéke 1.

2446 Ismeretes, hogy bármely pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2, és az összeg csak abban az esetben lesz 2, ha a szám 1.
Mivel $\operatorname{tg}x$ reciproka $\operatorname{ctg}x$, az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\operatorname{tg}x=1$, azaz $x=\frac{\pi}{4}$.

2447 A 2435. feladat eredményét használjuk:

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos 72° = \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

$$\sin 72° = \sqrt{1-\cos^2 72°} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10};$$

$$\operatorname{ctg}72° = \frac{\cos 72°}{\sin 72°} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10}} = \sqrt{\frac{6-2\cdot\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}+10}} = \sqrt{\frac{5-2\cdot\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{25-10\cdot\sqrt{5}}}{5};$$

$$\operatorname{tg}72° = \frac{\sin 72°}{\cos 72°} = \sqrt{\frac{5}{5-2\cdot\sqrt{5}}} = \sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}.$$

2448 Tekintsünk egy egységnyi átfogójú derékszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge α. A háromszög befogói $\sin\alpha$, illetve $\cos\alpha$.

Területét a befogók szorzatának feleként számítjuk:

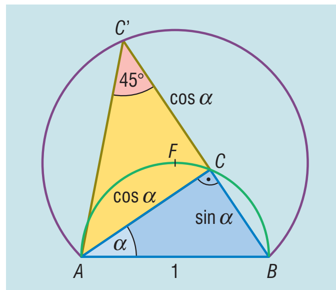
$$t = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2}.$$

Ismeretes, hogy adott átfogójú derékszögű háromszögek közül az egyenlő szárú derékszögű háromszög területe a legnagyobb, így $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ akkor a legnagyobb, ha $\alpha = 45°$:

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha \le \sin 45° \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tehát a $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ kifejezés maximuma $\frac{1}{2}$, amelyet $\alpha = 45°$ esetén vesz fel.

2449 Tekintsünk egy egységnyi AB átfogójú derékszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge α. A háromszög befogói $\sin\alpha$, illetve $\cos\alpha$.



A háromszög-egyenlőtlenség alapján a befogók összege nagyobb az átfogónál, tehát $1 < \sin\alpha + \cos\alpha$.

Be kell még bizonyítanunk, hogy $\sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{2}$.

Az egységnyi AB átfogó mint átmérő fölé emeljünk Thalész-kört. A C derékszögű csúcs ezen a körön mozoghat. Mérjük fel a C-n túl BC egyenesre az AC oldal hosszát, így C' ponthoz jutunk. Az ACC' háromszög egyenlő szárú derékszögű, tehát $AC'C$ szög 45°. A $BC' = \sin\alpha + \cos\alpha$ szakasz hosszára kell felső becslést adnunk.

Mivel az AB adott, a C' pont az AB húr 45°-os látószögkörívén van, amelynek középpontja az AB ív F felezőpontja. Ennek a körívnek a húrja BC', ami akkor lesz a leghosszabb, ha éppen a látókör átmérője, vagyis áthalad az AB körív F felezéspontján. Ez alapján BC' akkor a legnagyobb, ha az ABC háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Tehát $\sin\alpha + \cos\alpha$ akkor maximális, ha $\alpha = 45°$, tehát

$$\sin\alpha + \cos\alpha \le \sin 45° + \cos 45° = \sqrt{2}.$$

2450 A 2444. feladat *b)* részéből:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha;$$

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha =$$
$$= (1 - 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)^2 - 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha,$$

vagyis

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = 1 - 4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha.$$

Ezeket felhasználva:

$$2 \cdot (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)^2 - (\sin^8\alpha + \cos^8\alpha) =$$
$$= 2 \cdot (1 - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)^2 - (1 - 4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha) =$$
$$= 2 - 4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha - 1 + 4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha = 1.$$

A kifejezés értéke tehát 1.

2451 Mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, valamint $1 + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, illetve $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, az egyenlet bal oldala így is írható:

$$1 + 2 \cdot (\text{tg}^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha) + 2.$$

Ismeretes, hogy bármely pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2, tehát a bal oldal legalább $1 + 4 + 2 = 7$. Így nincs olyan α hegyesszög, amely teljesítené az egyenlőséget.



Háromszögek különböző adatainak meghatározása szögfüggvények segítségével – megoldások

2452 A háromszög szögei: 66,42°, 66,42° és 47,16°.

2453 A háromszög szögei: 73,74°, 53,13° és 53,13°.

2454 Az inga végpontjának két szélső helyzete közötti távolság 6,5 cm.

2455 A két szomszédos fog által bezárt szöget megkapjuk, ha egy olyan egyenlő szárú háromszög szárszögét 8 egyenlő részre osztjuk, amelynek az alapja 40 cm és a szára 38 cm hosszú. A szárszögre:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{20}{38} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 63{,}51°.$$

A lombseprű két szomszédos foga $\dfrac{63{,}51°}{8} \approx 7{,}94°$ szöget zár be.

2456 A háromszög oldalai: 141,38 cm, 83,82 cm és 83,82 cm.

2457 A helyesen kitöltött táblázat ($a > 0$):

Oldalak száma	Egy oldal hossza	Beírt kör sugarának hossza	Köré írt kör sugarának hossza
5	10 cm	6,88 cm	8,51 cm
12	3,62 cm	6,76 cm	7 cm
9	6,55 cm	9 cm	9,58 cm
n	a	$\dfrac{a}{2\cdot\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}}$	$\dfrac{a}{2\cdot\sin\dfrac{180°}{n}}$
n	$2r\cdot\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}$	r	$\dfrac{r}{\cos\dfrac{180°}{n}}$
n	$2R\cdot\sin\dfrac{180°}{n}$	$R\cdot\cos\dfrac{180°}{n}$	R

2458 A középponti szög: 77,36°.

2459 Megközelítőleg 7,71 cm hosszú húrhoz tartozik 40°-os kerületi szög.

2460 A kör sugara 6,55 cm.

2461 A kerületi szög lehet 20,49° vagy 159,51°.

2462 Az oldallal szemközti szög lehet 23,58° vagy 156,42°.

2463 A háromszög területe: *a)* 408,95 dm^2; *b)* 430 dm^2; *c)* 329,40 dm^2.

2464 A háromszög szárai 15,88 cm, az alapja 14,05 cm hosszú.

2465 A paralelogramma területe: *a)* 258,58 dm^2; *b)* 420 dm^2; *c)* 269,97 dm^2.

2466 A paralelogramma területe 596,16 cm^2.

2467 *a)* A szabályos tízszög területe 769,4 cm^2. *b)* A szabályos hétszög területe 363,4 cm^2.

c) A szabályos n-szög területe $n\cdot\dfrac{25}{\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}}$ cm^2.

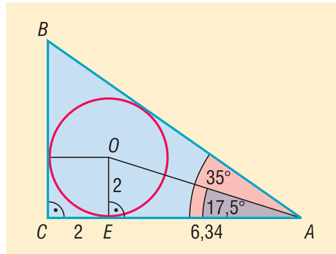
2468 A területek aránya:

$$\frac{T_{\text{nyolcszög}}}{T_{\text{hatszög}}} = \frac{8 \cdot \dfrac{6^2 \cdot \sin 45^\circ}{2}}{6 \cdot \dfrac{8^2 \cdot \sin 60^\circ}{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}6124.$$

A nyolcszög területe a hatszög területének 61,24 százaléka.

2469 A köré írt kör sugara 10,12 cm.

2470 Tekintsük az ábra jelöléseit. A beírt kör középpontja rajta van az A csúcsból kiinduló belső szögfelezőn. Mivel egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, az OEA háromszög derékszögű. Ezért felírható:



$$\text{tg}\, 17{,}5^\circ = \frac{2}{EA};$$

$$EA = \frac{2}{\text{tg} 17{,}5^\circ} \approx 6{,}34 \text{ cm}.$$

A beírt kör középpontja, a derékszögű csúcs és a beírt körnek a befogókkal vett érintési pontjai négyzetet határoznak meg. Tehát $CE = 2$ és $CA = 2 + 6{,}34 = 8{,}34$ cm.

Az ABC háromszög többi oldala a 35° szögfüggvényeiből számítható:

$$AB = \frac{8{,}34}{\cos 35^\circ} \approx 10{,}18 \quad \text{és} \quad BC = 8{,}34 \cdot \text{tg}\, 35^\circ \approx 5{,}84.$$

A háromszög oldalai: 8,34 cm, 5,84 cm és 10,18 cm.

2471 Legyen a háromszög alapja a, a szárai b hosszúságúak.

A háromszög alaphoz tartozó magasságát behúzva:

$$\frac{a}{2b} = \cos 72^\circ 35', \quad \text{amiből} \quad a = 2b \cdot \cos 72^\circ 35'.$$

A feladat feltétele szerint $a + b = 20$, tehát:

$$2b \cdot \cos 72^\circ 35' + b = 20, \quad \text{amiből} \quad b = \frac{20}{2 \cdot \cos 72^\circ 35' + 1} \approx 12{,}51;$$

$$a = 2 \cdot 12{,}51 \cdot \cos 72^\circ 35' \approx 7{,}49.$$

A háromszög oldalai: 12,51 cm, 12,51 cm és 7,49 cm.

2472 *a)* A háromszög szára 34,3 cm.

b) A háromszög területe 587,0 cm^2.

c) A háromszög beírt körének a sugara 9,9 cm.

d) A háromszög köré írt körének a sugara 25,1 cm.

2473 A háromszög szögei 54°, 65° és 61°.

a) A háromszög területe: $2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \approx 513{,}0$ cm^2.

b) A háromszög legrövidebb m magassága a leghosszabb a oldalhoz tartozik, ami a háromszög legnagyobb α szögével szemben van. Az oldal hossza $a = 2R \cdot \sin\alpha$.

A legrövidebb magasságot a háromszög területéből számíthatjuk:

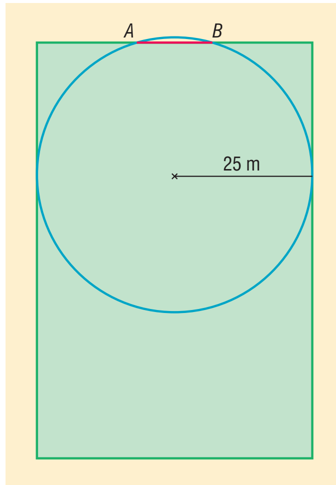
$$m = \frac{2T}{a} = \frac{4R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2R \cdot \sin\alpha} = 2R \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \approx 28{,}3 \text{ cm}.$$



c) A háromszög kerülete: $2R \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \approx 103{,}6$ cm.

d) A háromszög beírt körének a sugara: $r = \dfrac{T}{s} \approx 9{,}9$ cm.

2474 Tekintsük a focipályát felülnézetben. A kapu AB szélessége 7,35 m. Rajzoljuk meg azt a kört, amelyik áthalad az A és B pontokon, valamint érinti a két oldalvonalat. Ennek a körnek a sugara 25 m. Ismert, hogy egy szakasz fölé emelt α szögű látóköríven kívüli pontokból a szakasz α-nál kisebb szög alatt látszik.



Ennek alapján az oldalvonal mentén az a pont, amelyből a kapu a legnagyobb szög alatt látszik, a kör és az oldalvonal érintési pontja. Ebből a pontból a kapu éppen akkora szögben látszik, mint a 25 m sugarú körben a 7,35 m hosszúságú húrhoz tartozó kerületi szög. A kör sugara, a húr hossza és a kerületi szög közötti ismert összefüggés alapján:

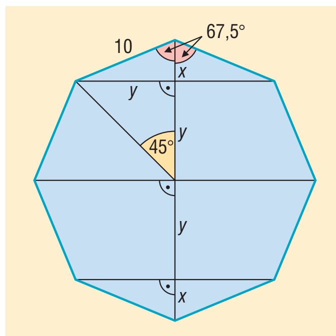
$$\sin\alpha = \frac{h}{2r} = \frac{7{,}35}{2 \cdot 25} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 8{,}45°.$$

A partjelző legfeljebb 8,45° szögben láthatja a 735 cm szélességű kaput.

2475 *a)* A nyolcszög beírt körének a sugara 12,07 cm.

b) A nyolcszög köré írt körének a sugara 13,07 cm.

c) A nyolcszög területe megközelítőleg 483 cm^2.



d) A szabályos nyolcszög egy oldala a középpontjából 45°-os szög alatt látszik, és egy belső szöge 135°. Az ábrán látható x, y szakaszok hosszát egy olyan derékszögű háromszögből számíthatjuk, amelynek hegyesszöge 67,5° átfogója 10 cm:

$$x = 10 \cdot \sin 67{,}5° \approx 9{,}24 \quad \text{és} \quad y = 10 \cdot \cos 67{,}5° \approx 3{,}83.$$

A tengelyes szimmetria miatt a leghosszabb átlót a rá merőleges átlók két 9,24 cm, illetve két 3,83 cm-es részekre osztják.

2476 Legyen az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AC oldalának felezőpontja E, valamint a súlyvonalak hossza $AF = 9$ cm és $BE = 12$ cm. Tudjuk, hogy a háromszög súlyvonalai harmadolják egymást, így az ABC háromszög S súlypontja az AF súlyvonalat $AS = 6$ cm, illetve $SF = 3$ cm hosszúságú szakaszokra bontja. Ugyanígy $ES = 4$ cm, illetve $SB = 8$ cm.

Az ABF és az ABC háromszögek BF és BC oldalaihoz tartozó magasságai egyenlők, valamint:

$$BF = \frac{1}{2} \cdot BC; \quad T_{ABF \text{ háromszög}} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABC \text{ háromszög}}.$$

A BSF és a BAF háromszögek FS és FA oldalaihoz tartozó magasságai egyenlők, valamint:

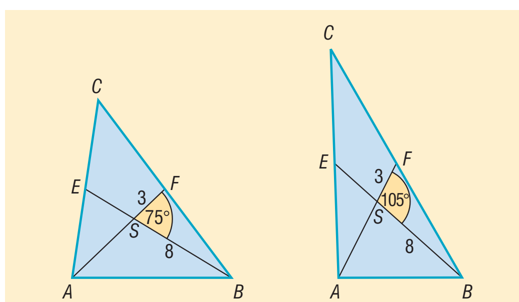
$$FS = \frac{1}{3} \cdot FA,$$

ezért

$$T_{BSF \text{ háromszög}} = \frac{1}{3} \cdot T_{BAF \text{ háromszög}}.$$

Tehát

$$T_{BSF \text{ háromszög}} = \frac{1}{6} \cdot T_{ABC \text{ háromszög}}.$$



A BSF háromszög területe kiszámítható, mivel adott két oldalának hossza és az általuk bezárt szög, amely 75° vagy 105°:

$$T_{BSF\text{ háromszög}} = \frac{8 \cdot 3 \cdot \sin 75°}{2} = \frac{8 \cdot 3 \cdot \sin 105°}{2} \approx 11{,}59\ \text{cm}^2.$$

Az ABC háromszög területe ennek hatszorosa: 69,54 cm^2.

2477 A háromszög két oldala legyen a, illetve b. Ha a két oldal által bezárt szög γ, akkor:

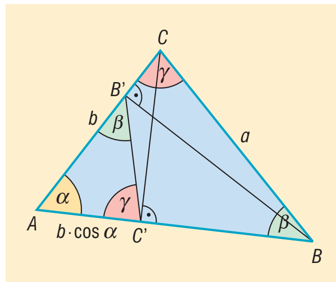
$$8 \cdot T_{\text{háromszög}} = 8 \cdot \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = 4 \cdot ab \cdot \sin\gamma.$$

A hegyesszög szinuszának definíciója alapján $\sin\gamma < 1 \;\Rightarrow\; 4ab \cdot \sin\gamma < 4ab$.

A számtani és mértani közép közti összefüggés alapján: $4ab = 4 \cdot \left(\sqrt{ab}\right)^2 \le 4 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (a+b)^2$.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

2478 Az ABC háromszög oldalainak hossza a szokásos jelöléssel legyen a, b és c, szögeinek nagysága α, β és γ. A háromszög B csúcsából induló magasság talppontja legyen B', a C csúcsából induló magasság talppontja legyen C'.



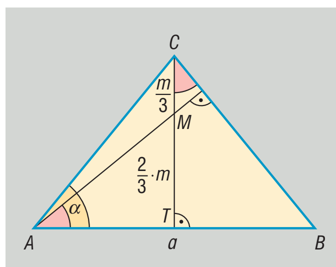
A $BCB'C'$ négyszög húrnégyszög, mivel a B' és C' pontokat tartalmazza a BC Thalész-köre.

A húrnégyszög egy külső szöge egyenlő a vele szemben lévő belső szöggel, ezért az $AC'B'$ háromszög szögei páronként egyenlők az ABC háromszög szögeivel, tehát a két háromszög hasonló.

A megfelelő oldalak aránya: $\frac{B'C'}{AC'} = \frac{a}{b}$. Az $AC'C$ derékszögű háromszögből $AC' = b \cdot \cos\alpha$, tehát:

$$\frac{B'C'}{b \cdot \cos\alpha} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad B'C' = a \cdot \cos\alpha.$$

2479 Az ABC háromszög a hosszúságú AB alapjához tartozó m magasságának talppontja T, a magasságpontja M, amely a feltétel szerint m-nek a C-hez közelebbi harmadolópontja.



Az AMT háromszög hasonló a CTB háromszöghöz, mivel mindkettőben a T-nél lévő szög 90°, illetve a TAM és TCB szögek merőleges szárú hegyesszögek.

A két háromszögben a megfelelő befogók aránya egyenlő:

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot m}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{m}.$$

Átrendezve, majd megoldva:

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{a} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Az alapon fekvő α szög tangense:

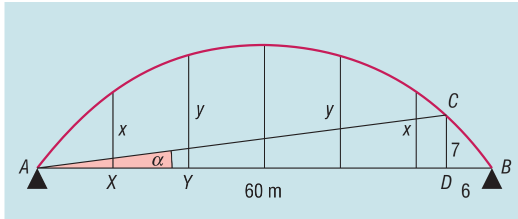
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\frac{a}{2}} = 2 \cdot \frac{m}{a} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 50{,}77°.$$

A háromszög szögei: 50,77°, 50,77° és 78,46°.

2480 Tekintsük a mellékelt ábrát.

a) A kör CB húrja a Pitagorasz-tétellel:

$$\sqrt{6^2+7^2}\approx 9{,}22 \text{ m}.$$



A húrhoz tartozó CAB kerületi szög az ADC háromszögből szögfüggvénnyel számolható:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{54}\quad\Rightarrow\quad\alpha=7{,}39^\circ.$$

Ismeretes, hogy a kör sugarát egy húrjának és a hozzá tartozó kerületi szögnek a segítségével kiszámolhatjuk:

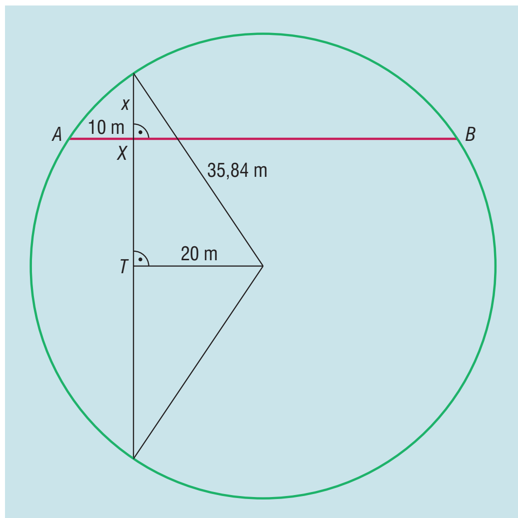
$$R=\frac{h}{2\cdot\sin\alpha}=\frac{9{,}22}{2\cdot\sin 7{,}39^\circ}\approx 35{,}84 \text{ m}.$$

A kör sugara 35,84 m.

b) A híd legnagyobb magasságát megkaphatjuk úgy, hogy a kör sugarának hosszából kivonjuk az AB húrjának a kör középpontjától vett távolságát.

A híd legnagyobb magassága: $35{,}84-\sqrt{35{,}84^2-30^2}\approx 16{,}23$ m.

c) Az x hosszúságú tartóoszlop hosszának meghatározásához tekintsük azt a kört, amelynek része a köríves tartószerkezet. Az oszlop X talppontjának A-tól vett távolsága a 60 m hatod része, azaz 10 m.



Az AB húrra merőleges húr a kör középpontjától 20 méter távolságra van, így hosszának a fele:

$$\sqrt{35{,}84^2-20^2}.$$

Az előző rész alapján XT távolság az AB húrnak a kör középpontjától vett távolsága:

$$\sqrt{35{,}84^2-30^2}.$$

Ez alapján:

$$x+\sqrt{35{,}84^2-30^2}=\sqrt{35{,}84^2-20^2},$$

$$x\approx 10{,}13 \text{ m}.$$

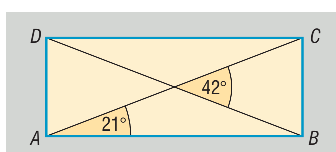
Az x hosszúságú tartóoszlop hossza megközelítőleg 10,1 m.

Hasonlóan az y hosszúságú tartóoszlop hossza megközelítőleg 14,8 m.

A függőleges tartóoszlopok tehát rendre 10,1, 14,8, 16,2, 14,8 és 10,1 méter hosszúak.

Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével – megoldások

2481 A téglalap átlóinak a hosszabbik oldalakkal bezárt szöge éppen az átlók által bezárt szögnek a fele.



Ha a téglalap hosszabbik oldala 25 cm, akkor a másik oldal:

$$25\cdot\operatorname{tg}21^\circ\approx 9{,}60.$$

Ha a téglalap rövidebbik oldala 25 cm, akkor a másik oldal:

$$\frac{25}{\operatorname{tg} 21^\circ} \approx 65{,}13.$$

A téglalap kerülete lehet:

$$2 \cdot (25 + 9{,}60) = 69{,}20 \text{ cm}$$

vagy

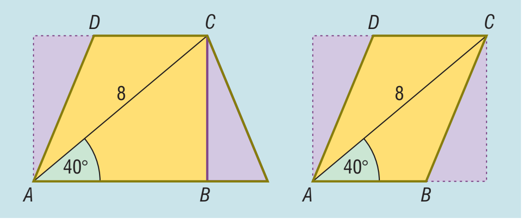
$$2 \cdot (25 + 65{,}13) = 180{,}26 \text{ cm}.$$

2482 A trapéz szögei: 55°, 55°, 125° és 125°.

2483 Ha a szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 21 cm, akkor a trapéz másik alapja 3,45 cm.
Ha a szimmetrikus trapéz rövidebbik alapja 21 cm, akkor a trapéz másik alapja 38,55 cm.
Ha a szimmetrikus trapéz paralelogramma, akkor a másik alapja is 21 cm.

2484 A trapéz területe 1545,42 cm^2.

2485 A szimmetrikus trapéz lehet húrtrapéz, vagy paralelogramma. Mindkét esetben átdarabolható egy olyan téglalapba, amelyik átlója 8 cm. Ez az átló a téglalap egyik oldalával 40°-os szöget zár be.



Területe:

$$t = 8 \cdot \sin 40^\circ \cdot 8 \cdot \cos 40^\circ \approx 31{,}51 \text{ cm}^2.$$

2486 A közös külső érintők által bezárt szög 17,25°.
A közös belső érintők által bezárt szög 81,08°.

2487 A körszelet területe 18,06 cm^2.

2488 A két rész területe 65,27 cm^2, illetve 1190,73 cm^2.

2489 A hulladék 4,46 százalék.

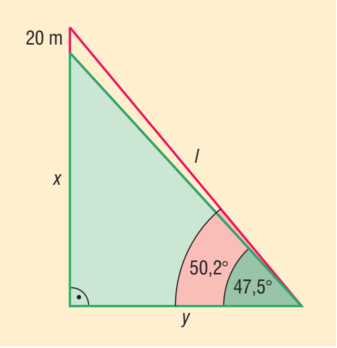
2490 A lámpabúra átmérője 26 cm.

2491 A hegy magasságát jelöljük m-mel. Felírhatjuk a következő egyenletet:

$$m \cdot \operatorname{ctg} 18^\circ 24' + m \cdot \operatorname{ctg} 22^\circ 43' = 8000 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{8000}{\operatorname{ctg} 18^\circ 24' + \operatorname{ctg} 22^\circ 43'} \approx 1483.$$

A hegy magassága: 1483 m.

2492 A mellékelt ábra alapján:



$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} 47{,}5^\circ \quad \text{és} \quad \frac{x+20}{y} = \operatorname{tg} 50{,}2^\circ.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy $x = 200$ m.

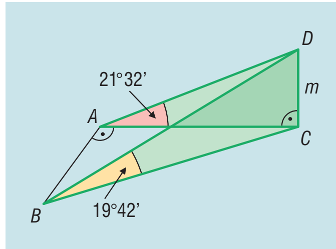
A varjú által megtett l út annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek hegyesszöge 50,2° és a vele szemben levő befogója 220 m:

$$l = \frac{220}{\sin 50{,}2^\circ} \approx 286.$$

A varjú által megtett út 286 m.



2493 Tekintsük a mellékelt ábrát. A hegy DC magassága legyen m.



Az ACD derékszögű háromszögben:

$$AC = m \cdot \text{ctg}\, 21°32'.$$

A BCD derékszögű háromszögben:

$$BC = m \cdot \text{ctg}\, 19°42'.$$

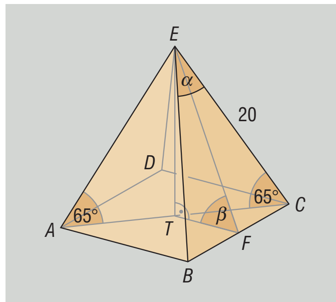
A Pitagorasz-tételt felírva az ABC derékszögű háromszögben:

$$1{,}2^2 + (m \cdot \text{ctg}\, 21°32')^2 = (m \cdot \text{ctg}\, 19°42')^2.$$

Az egyenletet megoldva $m = 1{,}022$.

A hegy magassága 1022 m.

2494 Tekintsük a mellékelt ábrát.



a) A gúla magassága a TCE derékszögű háromszögben számolható:

$$ET = 20 \cdot \sin 65° \approx 18{,}13 \text{ cm}.$$

b) Az alaplap átlóját a TCE derékszögű háromszögből számíthatjuk:

$$AC = 2 \cdot 20 \cdot \cos 65°.$$

Az alapél:

$$BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 20 \cdot \cos 65°}{\sqrt{2}} \approx 11{,}95 \text{ cm}.$$

c) Az oldallap és az alaplap β szöge a TFE szög. A TFE derékszögű háromszögben:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{ET}{TF} \quad \Rightarrow \quad \beta = 71{,}76°.$$

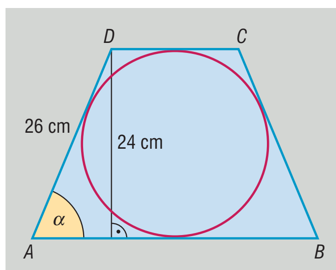
e) Két szomszédos oldalél által bezárt α szög a BEC egyenlő szárú háromszögből számítható:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{FC}{EC} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 34{,}77°.$$

2495 *a)* Az érintők által bezárt szög: 106,26°. *b)* Az érintőszakasz hossza: 6 cm.

c) Az érintési pontok távolsága: 9,6 cm.

2496 A trapéz két alapjának számtani közepe a középvonal hossza, így az alapok összege 52 cm. Az érintőnégyszögek tétele alapján az alapok hosszának összege a két egyenlő szár hosszának összege. A szár hossza $52:2 = 26$ cm. A trapéz magassága a beírható kör sugarának kétszerese: 24 cm.



A szár és a trapéz magassága által meghatározott derékszögű háromszög α hegyesszögére felírható:

$$\sin\alpha = \frac{24}{26} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 67{,}38°.$$

A trapéz szögei: 67,38°, 67,38°, 112,62°, 112,62°.

2497 A derékszögű háromszög – hasonlóságtól eltekintve – egyértelműen adott, így vehetjük az átfogót 5 egységnyinek, a két szeletét 1, illetve 4 egységnyinek. A befogótétel alapján a rövidebbik befogó $\sqrt{1 \cdot 5} = \sqrt{5}$ egység.

A háromszög kisebb α hegyesszöge számítható szögfüggvénnyel: $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$.

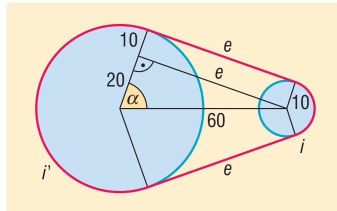
A háromszög hegyesszögei: 26,57°; illetve 63,43°.



2498 A külső érintők 14,25°-os szöget zárnak be.

A két kör középpontjának távolsága 8,06 cm, ami nagyobb, mint a körök sugarainak összege, tehát a két kör nem metszi egymást.

2499 *a)* Egyenes szíjhajtás esetén a szíj hossza az ábrán látható jelölés szerint: $2e + i + i'$.



Az e külső érintő hossza: $e = \sqrt{60^2 - 20^2} = 40 \cdot \sqrt{2}$ cm.

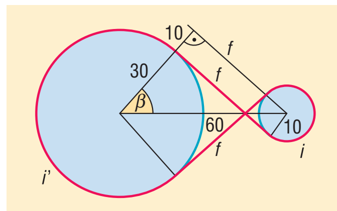
Az i és i' ívhossz középponti szögét meghatározhatjuk, ha az ábrán jelölt α szöget kiszámítjuk: $\cos\alpha = \dfrac{20}{60} \Rightarrow \alpha = 70{,}53°$.

Az i ívhossz $2 \cdot 10 \cdot \pi \cdot \dfrac{2 \cdot 70{,}53°}{360°} \approx 24{,}61$ cm.

Az i' ívhossz $2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \dfrac{360° - 2 \cdot 70{,}53°}{360°} \approx 114{,}58$ cm.

A szíj hossza: $2e + i + i' = 252{,}33$ cm.

b) Keresztezett szíjhajtás esetén hasonlóan járhatunk el.



Az f belső érintő hossza: $f = \sqrt{60^2 - 40^2} = 20 \cdot \sqrt{5}$ cm.

Az i és i' ívhossz középponti szögét meghatározhatjuk, ha az ábrán jelölt β szöget kiszámítjuk:

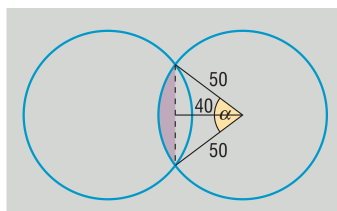
$$\cos\beta = \frac{40}{60} \quad \Rightarrow \quad \beta = 48{,}19°.$$

Az i ívhossz: $2 \cdot 10 \cdot \pi \cdot \dfrac{360° - 2 \cdot 48{,}19°}{360°} \approx 45{,}99$ cm.

Az i' ívhossz: $2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \dfrac{360° - 2 \cdot 48{,}19°}{360°} \approx 137{,}96$ cm.

A szíj hossza: $2f + i + i' = 273{,}39$ cm.

2500 A gabonakörök által lefedett területet kell meghatároznunk. A mindkét kör által lefedett rész területe a két egybevágó körszelet területének összege. Ezen körszelet középponti szöge meghatározható:



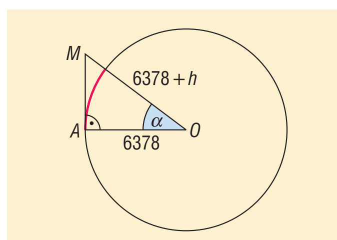
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{40}{50} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73{,}74°.$$

A körszelet területe: $407{,}94\ \text{m}^2$.

A körök által lefedett terület: $2 \cdot 50^2\pi - 2 \cdot 407{,}94 \approx 14\,884\ \text{m}^2 = 1{,}4884$ ha.

A bevételkiesése tehát: $1{,}4884 \cdot 4\,000 \cdot 20 \approx 119\,000$ forint.

2501 A mellékelt sematikus ábrát tekintve a hegy magasságát h-val jelöltük. Az A megfigyelési pontból a hegy csúcsa akkor látszik, ha a látóhatár felett van. A látóhatár az AOM derékszögű háromszög AM egyenese. Az O csúcsnál levő α szög az O középpontú, 6378 km sugarú körben a 250 km hosszú ívhez tartozó középponti szög:



$$\alpha = \frac{250}{2 \cdot 6378 \cdot \pi} \cdot 360° \approx 2{,}247°.$$



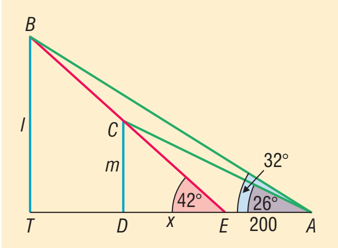
Az említett háromszögben számolva:

$$\frac{AO}{MA} = \cos\alpha,$$

$$\frac{6378}{6378 + h} = \cos 2,247^\circ \quad \Rightarrow \quad h \approx 4,908.$$

A hegy tehát legalább 4908 m magas.

2502 Az ábra jelöléseit használva a közelebbi hegy csúcsa legyen C, a távolabbié pedig B.



Először a közelebbi hegy DC magasságát határozzuk meg.

A CDA háromszögben: $\dfrac{m}{x + 200} = \text{tg}\, 26^\circ.$

A CDE háromszögben: $\dfrac{m}{x} = \text{tg}\, 42^\circ.$

Az egyenletrendszer megoldásából adódik:

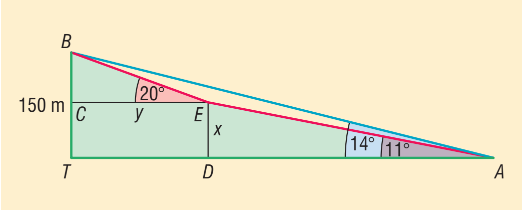
$$m = \frac{200 \cdot \text{tg}\, 26^\circ \cdot \text{tg}\, 42^\circ}{\text{tg}\, 42^\circ - \text{tg}\, 26^\circ} \approx 212,83.$$

A közelebbi hegycsúcs a síkság felett 213 m-re van.

A BT magasság meghatározása hasonló módon történhet a BTE és a BTA háromszögek segítségével.

A távolabbi hegycsúcs a síkság felett 408 m-re van.

2503 Az ábra jelöléseivel: a sikló $BT = 150$ m magasra visz. Az ABT derékszögű háromszögben:



$$TA = \frac{150}{\text{tg}\, 14^\circ} \approx 601,62 \text{ m}.$$

Az ADE háromszögben:

$$\text{tg}\, 11^\circ = \frac{x}{601,62 - y}.$$

A BCE háromszögben:

$$\text{tg}\, 20^\circ = \frac{150 - x}{y}.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy:

$$y = \frac{150 - 601,62 \cdot \text{tg}\, 11^\circ}{\text{tg}\, 20^\circ - \text{tg}\, 11^\circ} \approx 194,92.$$

BE hosszúság a BCE háromszögből számítható:

$$BE = \frac{194,92}{\cos 20^\circ} \approx 207,43.$$

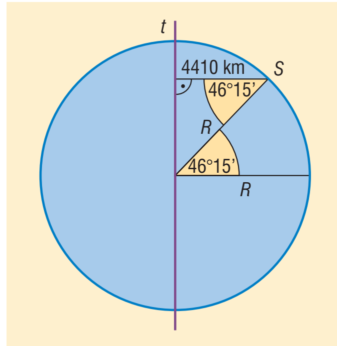
AE hosszúság az ADE háromszögből számítható:

$$AE = \frac{601,62 - 194,92}{\cos 11^\circ} \approx 414,31.$$

A BE és AE szakaszok hosszának összege a sikló által megtett út, amely megközelítőleg 622 méter.



2504 Az ábrán az S pont Szeged helyét jelzi, t egyenes a Föld tengelye, R a sugara.

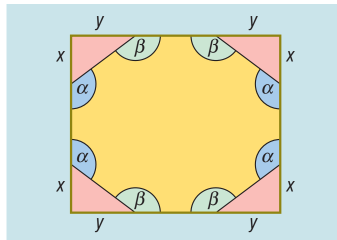


Az S pontnak t egyenestől vett távolsága:

$$R \cdot \cos 46°15' \approx 4410 \text{ km}.$$

A t tengely körül elfordulva S pont 23,95 óra alatt akkora utat tesz meg, mint egy 4410 km sugarú kör kerülete. Ezért Szeged a Föld tengelye körül $\frac{2\pi \cdot 4410}{23{,}95} \approx 1157 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel forog.

2505 A megmaradó nyolcszög szimmetrikus a téglalap szimmetriatengelyeire, tehát az ábrán látható módon négy egybevágó derékszögű háromszöget kell levágni a téglalap csúcsaiból. A megmaradó nyolcszög egyenlő oldalú, tehát a háromszögek x és y befogóira teljesülnie kell, hogy:



$$\left.\begin{aligned} 13 - 2y &= 11 - 2x \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 11 - 2x \end{aligned}\right\}.$$

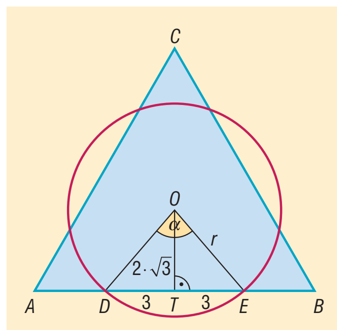
Az első egyenletből kifejezve x-et, majd a másodikba beírva az $y^2 - 25y + 84 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Innen y-ra 21 vagy 4 adódik, de ezek közül csak az $y = 4$ lehet megoldás.

Visszahelyettesítve valamelyik egyenletbe $x = 3$.

Szögfüggvénnyel számíthatók a 3 és 4 befogójú derékszögű háromszög hegyesszögei: 53,13° és 36,87°.

A nyolcszög szögei: $\alpha = 180° - 53{,}13° = 126{,}87°$, illetve $b = 180° - 36{,}87° = 143{,}13°$.

2506 A kör középpontja a szabályos háromszög O középpontja. Az ábrán látható ABC szabályos háromszög AB oldalának felezőpontja T, a csúcsokhoz közelebbi negyedelőpontok D és E.



Ahhoz, hogy megmondjuk, a kör területének hány százaléka esik a háromszögön kívül, ki kell számolni a kör DE húrja által létrehozott kisebbik körszelet területét. Ehhez szükségünk van a kör sugarára és a DOE középponti szögre.

Az OT szakasz hossza a 12 cm oldalú szabályos háromszög magasságának harmada:

$$OT = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

A kör sugara számítható az ODT háromszögből:

$$r = \sqrt{\left(2 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{21} \text{ cm}.$$

Az α középponti szög felére felírható:

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 81{,}79°.$$

A kisebbik körszelet területe:

$$T_{\text{körszelet}} = \left(\sqrt{21}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{81{,}79°}{360°} - \frac{\left(\sqrt{21}\right)^2 \cdot \sin 81{,}79°}{2} \approx 4{,}6 \text{ cm}^2.$$

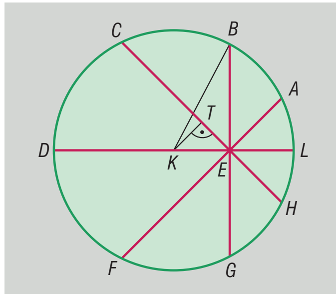
A körnek a háromszögön kívül eső területe ennek háromszorosa, vagyis $13{,}8\ \text{cm}^2$.

A kör területének $\dfrac{13{,}8}{21\pi} \cdot 100 \approx 20{,}9$ százaléka esik a háromszögön kívül.

A háromszög körön kívül eső területének kiszámításához a háromszög területéből kivonjuk a kör és a háromszög közös területét:

$$\frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \left[\left(\sqrt{21}\right)^2 \cdot \pi - 13{,}8\right] \approx 10{,}18\ \text{cm}^2.$$

2507 Tekintsük a mellékelt ábrát. Az emlékmű helyét jelölje E, a park középpontját K.



A két szomszédos ösvény által bezárt szög a 360° nyolcada, azaz 45°. Az ábra tengelyesen szimmetrikus DL egyenesére, így elegendő meghatározni az EL, EA, EB, EC és ED ösvények hosszát.

Először EL és ED hossza:

$$EL = 300 - 70 = 230\ \text{m};$$
$$ED = 300 + 70 = 370\ \text{m}.$$

Az EB szakasz merőleges KE-re, így a KEB derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel alapján:

$$EB = \sqrt{300^2 - 70^2} \approx 291{,}72\ \text{m}.$$

Az EC és EA ösvények hosszának összege éppen CH távolsággal egyenlő, ami a kör egy húrja.

A húrnak a kör K középpontjától vett távolsága a KTE egyenlő szárú derékszögű háromszögből számítható:

$$KT = KE \cdot \sin 45° = 70 \cdot \sin 45° = 35 \cdot \sqrt{2} \approx 49{,}5\ \text{m}.$$

Ez alapján:

$$CT = \sqrt{300^2 - \left(35 \cdot \sqrt{2}\right)^2} \approx 295{,}89\ \text{m}.$$

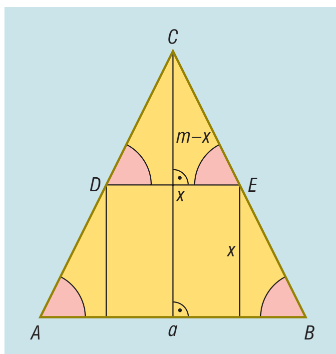
Mivel $KT = TE$, a CE ösvény hossza $295{,}89 + 49{,}5 = 345{,}39$ m.

$$EH = 295{,}89 - 49{,}5 \approx 246{,}39\ \text{m}.$$

Az ösvények hossza megközelítőleg:

$$EL = 230\ \text{m}; \quad EA = EH = 246{,}39\ \text{m}; \quad EB = EG = 291{,}72\ \text{m};$$
$$EC = EF = 345{,}39\ \text{m}; \quad DE = 370\ \text{m}.$$

2508 A háromszög alapja legyen a, a hozzá tartozó magassága m, a négyzet oldala x hosszúságú. A feladat feltétele szerint:



$$2x^2 = \frac{m \cdot a}{2}, \quad \text{amiből} \quad 4x^2 = m \cdot a. \qquad (1)$$

Az ábra jelöléseit használva, az ABC és DEC háromszög szögei páronként egyenlők, tehát $ABC\triangle \sim DEC\triangle$.

A két háromszög alapjának és magasságának aránya egyenlő:

$$\frac{x}{a} = \frac{m - x}{m}, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{a \cdot m}{a + m}. \qquad (2)$$



Az (1) és (2) egyenleteket összevetve, majd rendezve:

$$4 \cdot \left(\frac{a \cdot m}{a+m}\right)^2 = m \cdot a,$$

$$4 \cdot a \cdot m = (a+m)^2,$$

$$0 = m^2 - 2 \cdot a \cdot m + a^2,$$

$$0 = (m-a)^2.$$

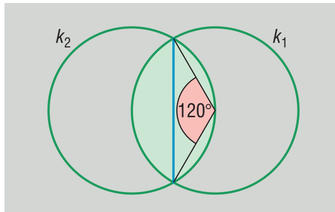
Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha $m = a$. A háromszög alapon fekvő α szögének tangense:

$$\text{tg}\alpha = \frac{m}{\frac{a}{2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 63{,}43°.$$

A háromszög szögei: 63,43°, 63,43° és 53,14°.

2509 A vonalkázott terület nagysága legyen T. Az ábrán látható k_1 és k_2, valamint a k_2 és k_3 körök középpontjainak távolsága éppen a sugaruk hossza.

Tehát a k_1 és k_2 körök közös részének területe egy 6 cm sugarú kör 120°-os középponti szögéhez tartozó körszelet területének a kétszerese:



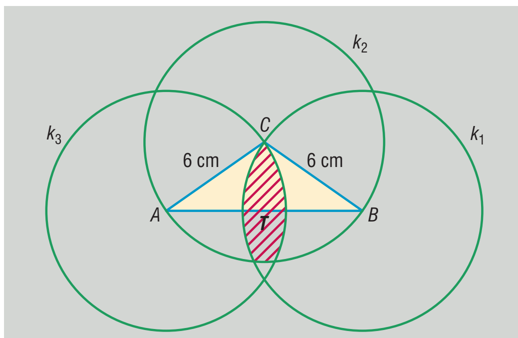
$$2 \cdot \left(6^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} - \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = 44{,}18 \text{ cm}^2.$$

Hasonlóan a k_3 és k_2 körök közös részének területe: 44,18 cm^2.

Tekintsük a k_1 és k_2, valamint a k_2 és k_3 körök közös része által lefedett területet.

Ezt a területet kétféleképpen számíthatjuk. Egyrészt: $2 \cdot 44{,}18 - T$.

Másrészt kiszámítható a terület úgy is, hogy a C középpontú, 6 cm sugarú, 110°-os körcikk területéhez hozzáadjuk a k_1 és k_2, valamint a k_2 és k_3 körök közös része területének a felét:



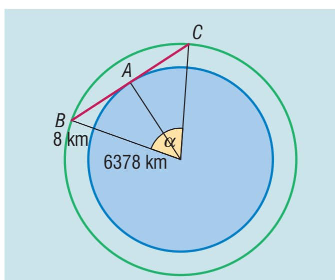
$$6^2 \cdot \pi \cdot \frac{110°}{360°} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 44{,}18 = 78{,}72 \text{ cm}^2.$$

A kétféle módon számított terület egyenlő:

$$2 \cdot 44{,}18 - T = 78{,}72 \quad \Rightarrow \quad T = 9{,}64 \text{ cm}^2.$$

A vonalkázott terület tehát 9,64 cm^2.

2510 A repülőgép 6378 + 8 = 6386 km sugarú köríven repül. A sematikus ábrát tekintve, ha a szemlélő az A pontban van, akkor a repülőgép számára addig tartózkodik a látóhatár felett, amíg a BC köríven végigrepül. A BC körív α középponti szögére teljesül, hogy:



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{6378}{6386} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5{,}74°.$$

A repülőgép által megtett út: $2 \cdot 6386 \cdot \pi \cdot \dfrac{5{,}74°}{360°} \approx 639{,}43$ km.

Ezt az utat $t = \dfrac{639{,}43}{700} \approx 0{,}91$ óra alatt teszi meg.

A repülőgép körülbelül 55 percig tartózkodik a látóhatár felett.

Vegyes feladatok II. – megoldások

2511 *a)* A kifejezés értéke 0.

b) A kifejezés egyszerűbb alakja $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

c) A kifejezés értéke 1.

d) A kifejezés értéke 1.

e) A kifejezés egyszerűbb alakja $\operatorname{tg}\alpha$.

2512 *a)* A kifejezés pontos értéke 3.

b) A kifejezés pontos értéke 0,25.

c) A kifejezés pontos értéke 0.

2513 *a)* A szög koszinusza $\frac{60}{61}$, tangense $\frac{11}{60}$ és kotangense $\frac{60}{11}$.

b) A szög szinusza $\frac{21}{29}$, tangense $\frac{21}{20}$ és kotangense $\frac{20}{21}$.

c) A szög szinusza $\frac{8}{17}$, koszinusza $\frac{15}{17}$ és kotangense $\frac{15}{8}$.

d) A szög szinusza $\frac{1}{\sqrt{10}}$, koszinusza $\frac{3}{\sqrt{10}}$ és tangense $\frac{1}{3}$.

2514 A keletkezett részek hossza 1,99 cm, 2,15 cm, 2,54 cm és 3,32 cm.

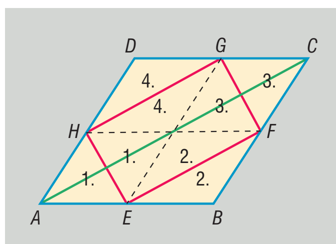
2515 Az akna megközelítőleg 50 m mély.

2516 A másik alap 16,41 cm, a másik szár 3,9 cm hosszú.

2517 Az oldalak hossza 20,32 és 15,24 cm.

2518 Ismeretes, hogy egy háromszög középvonala a háromszögből egy az eredetihez hasonló háromszöget metsz le. A hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, tehát a középvonallal lemetszett háromszög területe az eredeti háromszög területének negyede.

Az ábra jelöléseit használva, az $ABCD$ rombusz oldalainak felezőpontjai E, F, G és H.



A rombuszt az AC átlója két egybevágó háromszögre bontja. Az ABC háromszög középvonala EF, így az EBF háromszög területe negyede az ABC háromszög területének, illetve nyolcada a rombusz területének. Hasonlóan a rombusz területének nyolcad része a GFC, HGD és HAE háromszögek területe is. Tehát az $EFGH$ négyszög területe fele a rombusz területének.

Ha a rombusz oldala a, akkor területének felére felírható:

$$110 = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 50° \quad \Rightarrow \quad a = 16{,}95.$$

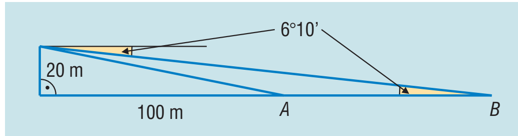
Tehát a rombusz oldala 16,95 cm.

Megjegyzés: A rombuszt a szaggatott vonallal jelölt középvonalai és az $EFGH$ négyszög oldalai nyolc darab háromszögre darabolják fel. Az azonos számmal jelölt háromszögek területe páronként megegyezik, így ezzel az átdarabolással látványosan is igazolható, hogy az EFGH négyszög területe fele a rombusz területének.



2519 A kört a két egyenes két $131{,}92\ \text{cm}^2$ és egy $188{,}32\ \text{cm}^2$ területű részre osztja.

2520 Tekintsük az ábra jelöléseit. A folyó AB szélességére felírhatjuk:

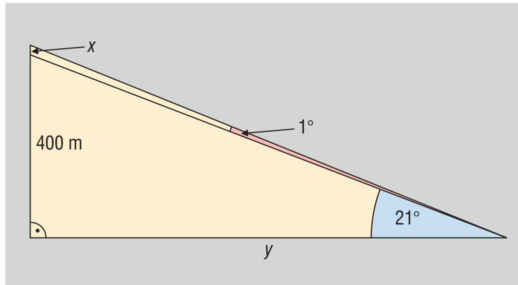


$$\frac{100+AB}{20}=\text{ctg}\,6°10' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB=20\cdot\text{ctg}\,6°10'-100\approx 85.$$

A folyó szélessége megközelítőleg 85 m.

2521 Tekintsük a mellékelt ábrát. Legyen a torony magassága x. Az y távolság számítható:



$$y=400\cdot\text{ctg}\,21°.$$

Továbbá felírható:

$$\frac{x+400}{y}=\text{tg}\,22°.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy $x=21$. A torony magassága 21 m.

2522 *a)* és *b)* rész esetén a kifejezés értéke egyszerűsítés után 1.

c) Négyzetre emelve, majd összevonva a kifejezés: $4\cdot\sqrt{3}\cdot\text{tg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,\alpha=4\cdot\sqrt{3}$.

d) Felhasználva, hogy $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, adódik, hogy a kifejezés: $\dfrac{4\cdot\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=4$.

e) A második törtben $\text{ctg}\,\alpha$-t átírva:

$$\frac{\text{tg}\,\alpha}{1-3\cdot\text{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\text{ctg}^2\alpha-3}{\text{ctg}\,\alpha}=\frac{\text{tg}\,\alpha}{1-3\cdot\text{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha}-3}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{\text{tg}\,\alpha}{1-3\cdot\text{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-3\cdot\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}=1.$$

2523 *a)* A szárak 30,78 cm hosszúak.

b) A szárhoz tartozó magasság 17,21 cm.

c) A háromszög területe $264{,}86\ \text{cm}^2$.

2524 Mivel a beírt kör befogókkal vett érintési pontjai, a beírt kör középpontja és a derékszögű csúcs négyzetet határoznak meg, a beírt kör sugara $12\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6\cdot\sqrt{2}$ cm.

A 2470. feladat gondolatmenete alapján az átfogó 41,51 cm.

2525 *a)* A rombusz átlói: 9,52 cm és 28,45 cm.

b) A rombuszba írt kör sugara a rombusz magasságának fele: 4,51 cm.

c) A rombusz területe $135{,}41\ \text{cm}^2$.

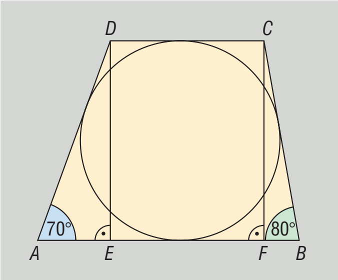
2526 Legyen a rombusz oldala a. Mivel a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást és felezik a csúcsoknál lévő szögeket, felírható: $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{e}{2a}$, illetve $\sin\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{f}{2a}$. A kettőt összeadva:

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}=\frac{e}{2a}+\frac{f}{2a}=\frac{e+f}{2a}.$$

Innen az állítás közvetlenül adódik, hiszen a rombusz kerülete $4a$.



2527 *a)* A trapéz magassága a beírt kör sugarának kétszerese, azaz 20 cm.



Az ábra jelöléseit használva:

Az AED derékszögű háromszögből:

$$AD = \frac{20}{\sin 70^\circ} \approx 21{,}28; \quad AE = \frac{20}{\operatorname{tg} 70^\circ}.$$

A BFC derékszögű háromszögből:

$$BC = \frac{20}{\sin 80^\circ} \approx 20{,}31; \quad BF = \frac{20}{\operatorname{tg} 80^\circ}.$$

Az érintőnégyszögek tétele alapján:

$$AB + DC = AD + BC = \frac{20}{\sin 70^\circ} + \frac{20}{\sin 80^\circ}.$$

Tehát a trapéz területe:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{m \cdot (a+c)}{2} = \frac{20 \cdot \left(\frac{20}{\sin 70^\circ} + \frac{20}{\sin 80^\circ}\right)}{2} \approx 415{,}9 \text{ cm}^2.$$

b) Mivel $AB + DC = 2DC + AE + BF$, ezért:

$$\frac{20}{\sin 70^\circ} + \frac{20}{\sin 80^\circ} = 2DC + \frac{20}{\operatorname{tg} 70^\circ} + \frac{20}{\operatorname{tg} 80^\circ} \quad \Rightarrow \quad DC \approx 15{,}39.$$

A másik alap kiszámítása: $AB = DC + AE + BF \approx 26{,}2.$

A trapéz szárai 21,28 és 20,31 cm, az alapjai 15,39 és 26,2 cm hosszúak.

2528 *a)* A két emelet közötti magasság $22 \cdot 17 = 374$ cm.

A kérdéses α szög tangense:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3{,}74}{10} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 20{,}51^\circ.$$

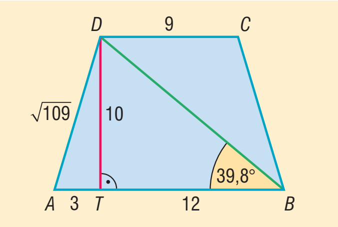
A felvonó hajlásszöge tehát 20,51°.

b) A lejtő hossza:

$$\frac{10}{\cos 20{,}51^\circ} \approx 10{,}68 \text{ m}.$$

A felvonó $\frac{10{,}68}{0{,}2} = 53{,}4$ másodperc alatt ér fel.

2529 Az ábra jelöléseit használva: $AT = 3$ cm.



Az ATD derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételből:

$$AD = \sqrt{109}.$$

A TBD derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg} TBD\sphericalangle = \frac{10}{15-3} \quad \Rightarrow \quad TBD\sphericalangle = 39{,}8^\circ.$$

Tehát a trapéz köré írt kör egy húrjának hossza $\sqrt{109}$, és ehhez a húrhoz tartozó kerületi szög 39,8°.
Innen az ismert összefüggés alapján:

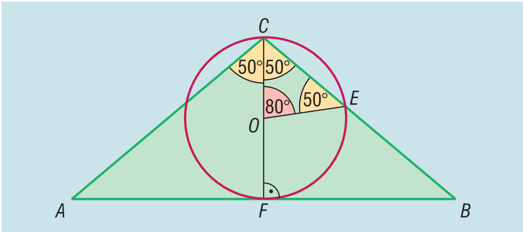
$$R = \frac{\sqrt{109}}{2 \cdot \sin 39{,}8^\circ} \approx 8{,}16.$$

A trapéz köré írt kör sugara 8,16 cm.



2530 Tekintsük az ábra jelöléseit. A BCF derékszögű háromszögben az AB alaphoz tartozó magasság:

$$CF = \frac{20}{\operatorname{tg} 50^\circ} = 16{,}78 \text{ cm}.$$



Tehát a magasság mint átmérő fölé írt kör sugara 8,39 cm:

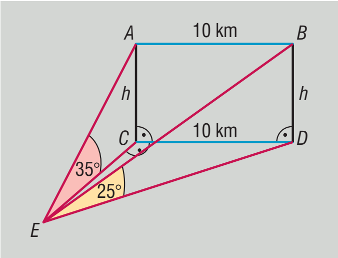
$$OC = OE = OF = 8{,}39.$$

Az OEC egyenlő szárú háromszögben: $COE\sphericalangle = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$. A kör CE húrjának a középponti szöge tehát 80°. A kör háromszögön kívül eső területe a 80°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területének kétszerese:

$$T = 2 \cdot \left(8{,}39^2 \cdot \pi \cdot \frac{80^\circ}{360^\circ} - \frac{8{,}39^2 \cdot \sin 80^\circ}{2} \right) = 28{,}91.$$

A kör és a háromszög közös részének területe tehát $8{,}39^2 \cdot \pi - 28{,}91 = 192{,}12 \text{ cm}^2$.

2531 A vízszintes terep síkja legyen a DCE háromszög síkja, a vár helyét jelölje E pont. A repülőgép repülési magassága h, és egy perc alatt az A pontból a B pontba ér. A repülőgép egy perc alatt 10 km utat tesz meg, tehát $AB = CD = 10$ km.



Az ECD derékszögű háromszögben a derékszögű csúcs C-nél van. Oldalainak hosszát fejezzük ki h-val.

Az ACE háromszögből: $EC = h \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ$.

A BDE háromszögből: $ED = h \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ$.

Az ECD derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

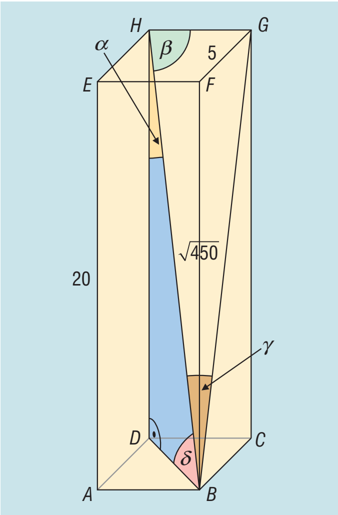
$$(h \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ)^2 + 10^2 = (h \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ)^2,$$

$$h^2 = \frac{100}{(\operatorname{ctg} 25^\circ)^2 - (\operatorname{ctg} 35^\circ)^2},$$

$$h \approx 6{,}251.$$

A repülőgép repülési magassága megközelítőleg 6251 m.

2532 A testátlók hossza $\sqrt{450}$ cm.



a) A BH testátlónak az oldalélekkel bezárt α szöge a BDH derékszögű háromszögből határozható meg:

$$\cos \alpha = \frac{20}{\sqrt{450}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 19{,}47^\circ.$$

b) A BH testátlónak az alapélekkel bezárt β szöge a BGH derékszögű háromszögből határozható meg:

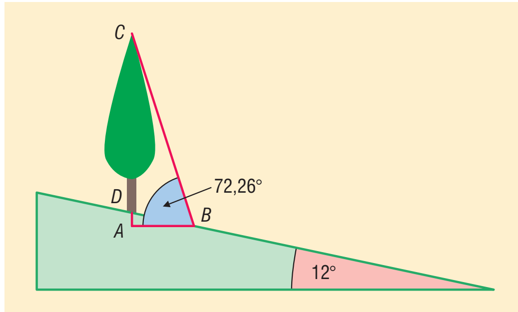
$$\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{450}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 76{,}37^\circ.$$

c) A BH testátlónak az oldallapokkal bezárt γ szöge a BGH derékszögű háromszögből határozható meg, a γ szög éppen a β szög pótszöge, vagyis $\gamma = 13{,}63^\circ$.

d) A BH testátlónak az alaplapokkal bezárt δ szöge a BDH derékszögű háromszögből határozható meg, a δ szög éppen az α szög pótszöge, vagyis $\delta = 70{,}53^\circ$.



2533 Az ábra jelöléseit használva a fa magassága DC, árnyéka $DB = 5$ m és a BAC szög derékszög.



Az ABC szög tangense:

$$\frac{1}{0{,}32} \Rightarrow ABC\sphericalangle = 72{,}26°.$$

Az ABD derékszögű háromszögben:

$$AB = 5 \cdot \cos 12° \approx 4{,}89,$$

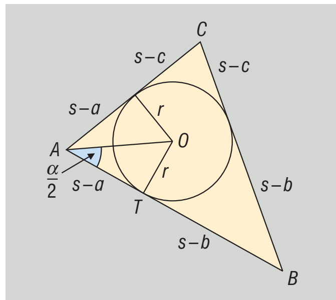
$$AD = 5 \cdot \sin 12° \approx 1{,}04.$$

Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} 72{,}26° = \frac{1{,}04 + DC}{4{,}89} \quad \Rightarrow \quad DC \approx 14{,}24.$$

A fa magassága 14,24 m.

2534 Ismeretes, hogy az ABC háromszögben az oldalakat a szokásos módon jelölve, a beírt kör érintési pontjainak a csúcsoktól vett távolsága $s-a$, $s-b$ és $s-c$.

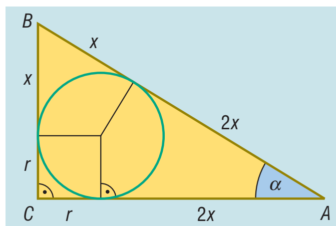


Mivel a háromszög beírt körének középpontját a belső szögfelezők metszéspontja szolgáltatja, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ kifejezhető az AOT derékszögű háromszögből: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$ (r a beírt kör sugara).

A háromszög területét kétféleképpen számolhatjuk. Egyrészt a beírt kör r sugarával, másrészt a Heron-képlettel:

$$s \cdot r = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}, \quad \text{amiből} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}}.$$

2535 Ha a háromszög átfogójának hossza $3x$, a beírt kör sugara r, akkor a beírt körhöz a csúcsokból húzott érintőszakaszok hosszának egyenlőségéből következően a befogók hossza $x+r$, illetve $2x+r$.



A derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján:

$$(x+r)^2 + (2x+r)^2 = (3x)^2.$$

Átrendezéssel adódik:

$$2r^2 + 6xr - 4x^2 = 0,$$

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{r}{x}\right) - 2 = 0,$$

$$\left(\frac{r}{x}\right)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Mivel $\frac{r}{x}$ értéke nem lehet negatív,

$$\frac{r}{x} = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}.$$

A derékszögű háromszög kisebb α szögére felírható, hogy:

$$\sin\alpha = \frac{r+x}{3x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{r}{x} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{-3+\sqrt{17}}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-1+\sqrt{17}}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 31{,}37°.$$

A háromszög hegyesszögei 31,37° és 58,63°.



2536 A háromszög szögei: $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$ és $\gamma = 70°$.

Mivel a háromszög hegyesszögű, az oldalakra kifelé rajzolt félkör mindegyike kívül esik a háromszög köré írható körén. Ahhoz, hogy a kérdést megválaszoljuk, elég a félkörök területének összegéből kivonni a háromszög köré írt körének a háromszögön kívül eső területét.

A háromszög oldalait az ismert összefüggés alapján számolhatjuk:

$$a = 2 \cdot 20 \cdot \sin 50°, \quad b = 2 \cdot 20 \cdot \sin 60° \quad \text{és} \quad c = 2 \cdot 20 \cdot \sin 70°.$$

A háromszög oldalaira kifelé rajzolt félkörök sugarai az oldalhosszak fele, ezért területük összege:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \left[(20 \cdot \sin 50°)^2 + (20 \cdot \sin 60°)^2 + (20 \cdot \sin 70°)^2\right] =$$
$$= 200\pi \cdot (\sin^2 50° + \sin^2 60° + \sin^2 70°) \approx 1394.$$

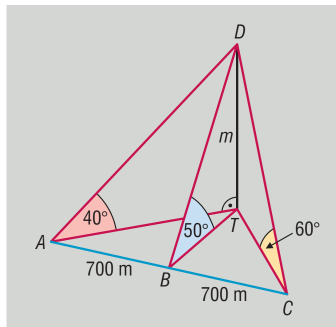
A háromszög köré írt körének a háromszögön kívül eső területe számolható úgy, hogy a kör területéből kivonjuk a háromszög területét:

$$20^2 \cdot \pi - 2 \cdot 20^2 \cdot \sin 50° \cdot \sin 60° \cdot \sin 70° \approx 757{,}3.$$

A kérdéses terület a két terület különbsége: $636{,}7\ \text{cm}^2$.

2537 Az ábra jelöléseit használva a hegy m magasságával számíthatók a következő távolságok:

$$AT = m \cdot \text{ctg}\, 40°,$$
$$BT = m \cdot \text{ctg}\, 50°,$$
$$CT = m \cdot \text{ctg}\, 60°.$$



Az ACT háromszög AC oldalának felezéspontja B. Erre a pontra tükrözve a háromszöget, az eredeti és tükrözött háromszög együtt egy paralelogrammát alkot. Ismeretes, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege egyenlő az átlói hosszának négyzetösszegével, ezért felírható:

$$2 \cdot (m \cdot \text{ctg}\, 40°)^2 + 2 \cdot (m \cdot \text{ctg}\, 60°)^2 = (2 \cdot m \cdot \text{ctg}\, 50°)^2 + 1400^2,$$

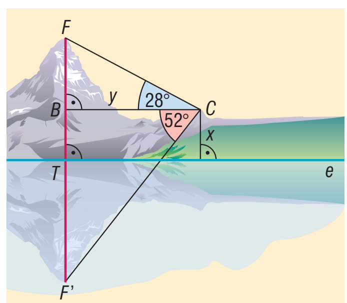
$$m^2 = \frac{1400^2}{2 \cdot \text{ctg}^2 40° + 2 \cdot \text{ctg}^2 60° - 4 \cdot \text{ctg}^2 50°},$$

$$m \approx 1685.$$

A hegy magassága 1685 méter.

2538 Az ábrán a turista a C pontban van, a hegycsúcs helyét F, a hegycsúcs tükörképét a tóban F' pont jelöli. A tó tükrének szintje az e egyenes. A tengerszint feletti magasságokból, illetve a tükröződésből adódóan:

$$TF = TF' = 2000 - 500 = 1500\ \text{m}.$$



Az FBC, illetve az $F'BC$ háromszögben:

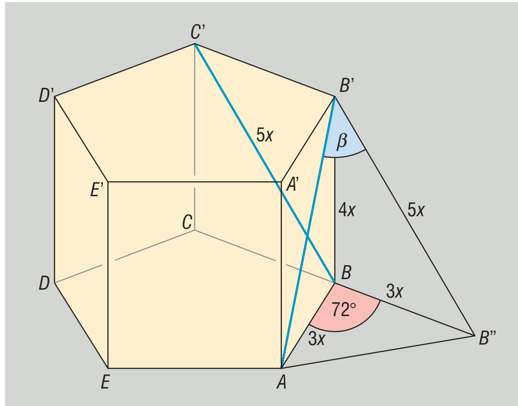
$$\text{tg}\, 28° = \frac{1500 - x}{y}, \quad \text{illetve} \quad \text{tg}\, 52° = \frac{x + 1500}{y}.$$

Az egyenletrendszert megoldva: $x \approx 619{,}52$; $y \approx 1656$.

a) A turista a tengerszint felett $619{,}5 + 500 = 1119{,}5$ méterre van.

b) Az FC távolság az FBC derékszögű háromszögből számítható: $FC = \dfrac{y}{\cos 28°} \approx 1875{,}5$.
A turista légvonalban a szemközti hegycsúcstól 1875,5 méterre van.

2539 Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen az alapél $3x$, az oldalél $4x$ hosszúságú. Az oldallap átlóinak hossza Pitagorasz-tétel alapján $5x$ hosszú. Toljuk el a $C'B$ átlót úgy, hogy a C' végpontja B'-be kerüljön. Az eltolt átló másik végpontja legyen B''.



Feladatunk az $AB'B''$ szög kiszámolása (β).

Az $AB'B''$ háromszög egyenlő szárú, szárainak hossza $5x$. Az AB'' hosszúság meghatározható az ABB'' egyenlő szárú háromszögből. Az ABB'' háromszög szárainak hossza $3x$, szárszöge pedig a szabályos ötszög egy külső szöge, azaz 72°. Ezekből az adatokból kapjuk:

$$AB'' = 2 \cdot 3x \cdot \sin 36° = 6 \cdot x \cdot \sin 36°.$$

Tehát az $AB'B''$ egyenlő szárú háromszög alapja $6 \cdot x \cdot \sin 36°$, szára $5x$. A háromszög β szárszögére felírható:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{3 \cdot x \cdot \sin 36°}{5x} = \frac{3}{5} \cdot \sin 36° \quad \Rightarrow \quad \beta = 41{,}3°.$$

Az AB' és BC' átlók 41,3° szöget zárnak be egymással.

Vektorok (emlékeztető), vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre – megoldások

2540 A szerkesztések a vektorműveletek definíciói alapján elvégezhetők.

2541 Használjuk a vektorműveletek definícióit.

2542 *a)* $3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$;

b) $(\sqrt{2}+1) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$;

c) $\dfrac{7 \cdot \vec{x} + \vec{y}}{2}$.

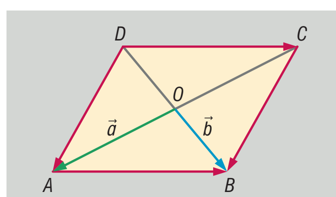
2543 *a)* $\vec{e} = \vec{c} - \vec{d}$ és $\vec{f} = -\vec{c} - \vec{d}$.

b) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{0}$, $\vec{b} + \vec{d} = \vec{0}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

c) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \dfrac{5}{\sin 35°} \approx 8{,}72$ cm, $|\vec{f}| = \dfrac{10}{\text{tg}\, 35°} \approx 14{,}28$ cm.

2544 Az ábra alapján (➡):

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{b} - \vec{a};$$
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = \vec{a} + \vec{b}.$$



2545 A lejtővel párhuzamos erő: $200 \cdot \sin 32° \approx 105{,}98$ N.

A lejtőre merőleges erő: $200 \cdot \cos 32° \approx 169{,}61$ N.

2546 A vektor végpontja a DC oldal D-hez közelebbi harmadolópontja.

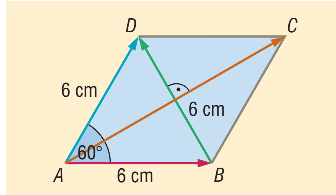
2547 A három vektort egymáshoz fűzve szabályos háromszöget kapunk. A vektorok egymással 120°-os szöget zárnak be.



2548 Ha a három vektor páronként 120°-os szöget zár be, akkor összegük nullvektor. A minimális hossz nulla. A maximális hossz 15 cm. Ekkor a három vektor azonos állású és azonos irányú.

2549 A nullvektor egyenlő az ellentettjével.

2550 Az ábra alapján:



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

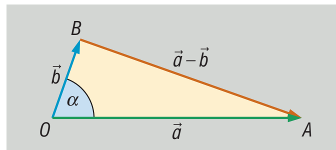
Mivel az ABD háromszög 6 cm oldalú szabályos háromszög:

$$\left|\overrightarrow{BD}\right| = 6 \text{ cm}.$$

Az AC átló egy 6 cm oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2 \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

2551 Az ábrán látható módon toljuk el a két vektort egy közös O kezdőpontba, és a vektorok végpontjai legyenek A és B.



A feladat feltétele szerint az ABO háromszög derékszögű, valamint az OA átfogó hossza háromszorosa az AB befogó hosszának.

A két vektor által bezárt α szög szögfüggvény segítségével számítható:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 70{,}53°.$$

A két vektor által bezárt szög tehát $70{,}53°$.

2552 *a)* 9; *b)* $\frac{9}{5}$; *c)* $3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$.

2553 A vektorösszeadásra vonatkozó paralelogrammaszabály alapján a szerkesztés elvégezhető.

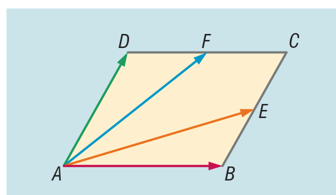
2554 A vektorfelbontás egyértelműségéből adódóan:

a) $\alpha = 2,\ \beta = -3;$

b) $\alpha - 2\beta = 2\alpha,$ illetve $\beta = 4 \Rightarrow \alpha = -8;$

c) $a - 2\beta = 0,$ illetve $5\alpha - \beta + 27 = 0 \Rightarrow \alpha = -6$ és $\beta = -3.$

2555 Az ábra alapján:



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}, \quad \text{illetve} \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2}.$$

Tehát:

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

2556 A harmadolópontba mutató vektorok:

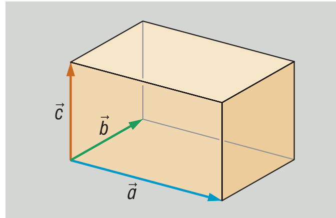
$$\frac{2 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{b} + 2 \cdot \vec{c}}{3}.$$

2557 A pontokba mutató vektorok:

$$2 \cdot \vec{b} - \vec{c} \quad \text{és} \quad 2 \cdot \vec{c} - \vec{b}.$$

2558 Az egy csúcsból kiinduló oldalélek vektorai legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. A lapátlók vektorai ezekkel kifejezve:

$$\vec{a}+\vec{b},\quad \vec{b}+\vec{c} \quad \text{és} \quad \vec{c}+\vec{a}.$$



A testátló vektora:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

A feladatban szereplő hét vektor összege:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}+\vec{c})+(\vec{c}+\vec{a})+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=4\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

A vektorok összege éppen a csúcsból kiinduló testátló vektorának a négyszerese.

2559 A keresett vektorok:

a) $\overrightarrow{OF}=-\vec{a}$; *b)* $\overrightarrow{OG}=-\vec{b}$; *c)* $\overrightarrow{OH}=-\vec{c}$;

d) $\overrightarrow{FC}=\vec{a}+\vec{c}$; *e)* $\overrightarrow{OK}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$; *f)* $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$;

g) $\overrightarrow{DC}=\vec{b}-\vec{a}$.

2560 A kocka A csúcsából kiinduló élvektorok legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Az $\vec{e}$, $\vec{f}$ és $\vec{g}$ lapközéppontokba mutató vektorok az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével előállíthatók:

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{f}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \text{és} \quad \vec{g}=\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}.$$

Az egyenletrendszert $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ ismeretlenekre megoldva adódik:

$$\vec{a}=\vec{e}+\vec{g}-\vec{f},\quad \vec{b}=\vec{e}+\vec{f}-\vec{g} \quad \text{és} \quad \vec{c}=\vec{f}+\vec{g}-\vec{e}.$$

2561 *a)* Az $\overrightarrow{FE}$ vektor a háromszög középvonalának a vektora, tehát párhuzamos az $\overrightarrow{AB}$ vektorral és fele olyan hosszú:

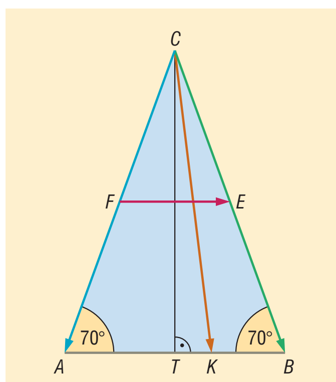
$$\overrightarrow{FE}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\frac{\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}}{2}.$$

A C pontból az AB szakasz harmadolópontjába mutató vektort a végpontokba mutató vektorok segítségével kifejezhetjük:

$$\overrightarrow{CK}=\frac{2\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}}{3}.$$

b) Az előzőek alapján:

$$\left|\overrightarrow{FE}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right|=\frac{18}{2}=9\text{ cm}.$$



A háromszög AB oldalához tartozó magasságának talppontja legyen T. Tudjuk, hogy a CTB derékszögű háromszög TB befogója 9 cm, valamint:

$$TBC\sphericalangle=70^\circ \Rightarrow CT=9\cdot\operatorname{tg}70^\circ.$$

A TKC derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétel alapján:

$$\left|\overrightarrow{CK}\right|=\sqrt{3^2+(9\cdot\operatorname{tg}70^\circ)^2}\approx 24{,}91.$$

Tehát $\left|\overrightarrow{CK}\right|\approx 24{,}91$ cm.



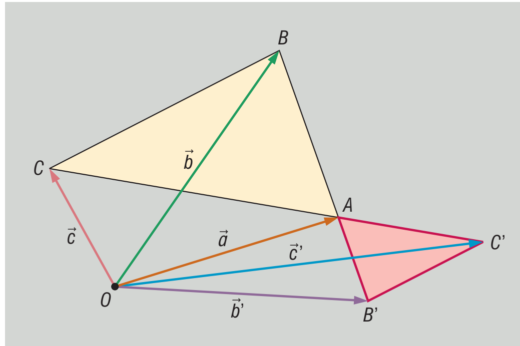
2562 Az A csúcs képe önmaga, tehát O-ból A-ba mutató vektor $\vec{a}$.

Ha a B csúcs képe B', akkor a BB' szakasz B'-höz közelebbi harmadolópontja az A pont, ezért az ismert képlet alapján:

$$\vec{a} = \frac{2 \cdot \vec{b'} + \vec{b}}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{b'} = \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{b}}{2}.$$

Hasonlóan adódik:

$$\vec{a} = \frac{2 \cdot \vec{c'} + \vec{c}}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{c'} = \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{c}}{2}.$$



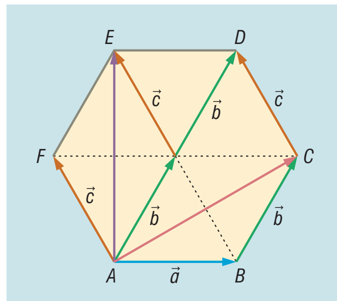
Tehát az O vonatkoztatási pontból a képháromszög csúcsaiba mutató vektorok:

$$\vec{a}, \quad \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{c}}{2}.$$

2563 Tekintsük az ábra jelöléseit.

A szabályos hatszögben $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ és $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$. Mivel a hatszög hat szabályos háromszögre bontható, az ábrán jelölt vektorok egyenlőségét kihasználva:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{AE} = \vec{b} + \vec{c} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AF} = \vec{c}.$$



Tehát:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{c} =$$

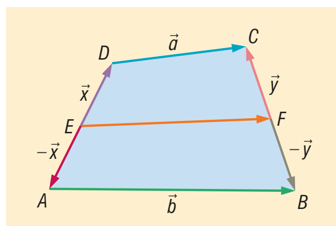
$$= 2 \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = 2 \cdot \overrightarrow{AD}.$$

2564 Legyen $\overrightarrow{ED} = \vec{x}$, $\overrightarrow{FC} = \vec{y}$. Ezen vektorok ellentettjei: $\overrightarrow{EA} = -\vec{x}$, illetve $\overrightarrow{FB} = -\vec{y}$.

Az $\overrightarrow{EF}$ vektort kétféleképpen is kifejezhetjük:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \vec{x} + \vec{a} - \vec{y},$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\vec{x} + \vec{b} + \vec{y}.$$



A két egyenletet összeadva adódik, hogy:

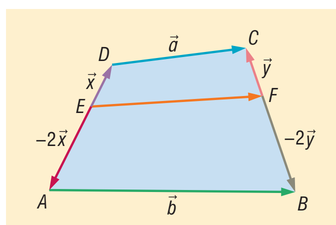
$$2 \cdot \overrightarrow{EF} = \vec{a} + \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{EF} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$

2565 Legyen $\overrightarrow{ED} = \vec{x}$, $\overrightarrow{FC} = \vec{y}$. Mivel E és F harmadolópontok, ezért $\overrightarrow{EA} = -2 \cdot \vec{x}$ és $\overrightarrow{FB} = -2 \cdot \vec{y}$.

Az $\overrightarrow{EF}$ vektort kétféleképpen is kifejezhetjük:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \vec{x} + \vec{a} - \vec{y},$$

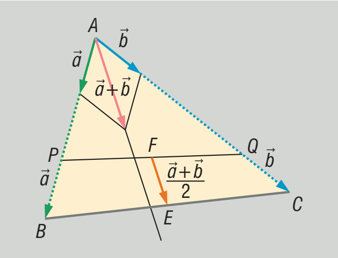
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -2 \cdot \vec{x} + \vec{b} + 2 \cdot \vec{y}.$$



Az első egyenletet kétszereséhez hozzáadva a második egyenletet:

$$3 \cdot \overrightarrow{EF} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{EF} = \frac{2 \cdot \vec{a} + \vec{b}}{3}.$$

2566 A $BCQP$ négyszög PB és QC oldalait az ábrán látható módon irányítsuk vektorokként. Mivel az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor a feladat feltétele alapján egyenlő hosszú, az általuk kifeszített paralelogramma rombusz. Az összegük vektora felezi a két vektor szögét, vagyis az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor párhuzamos az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezőjével. A $BCQP$ négyszögnek EF középvonala, így a 2564. feladat alapján:



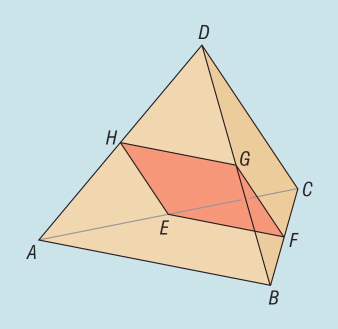
$$\overrightarrow{FE}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{FE}$ vektor párhuzamos az $\vec{a}+\vec{b}$ vektorral, ami párhuzamos az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezőjével.

Ezzel igazoltuk, hogy EF egyenes párhuzamos az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezőjével.

2567 Legyen O egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pont. Egy pontba mutató helyvektort jelöljünk ugyanolyan kisbetűvel, mint a pont betűjelét.

Az ábrán látható $ABCD$ tetraéder AC élének felezőpontja E, BC élének felezőpontja F, BD élének felezőpontja G és AD élének felezőpontja H. Az O vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe:



$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\quad \vec{f}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{g}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\quad \text{és}\quad \vec{h}=\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}.$$

Az $EFGH$ négyszög EF és HG szemközti oldalának vektorai:

$$\overrightarrow{EF}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2},\quad \text{illetve}\quad \overrightarrow{HG}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}.$$

Mivel a négyszög két szemben lévő oldalának vektora egyenlő, a két szemben lévő oldal párhuzamos és egyenlő hosszú.

Beláttuk, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma. Hasonlóan járhatunk el bármely két szemközti élpárból kiindulva.

Egy tetraéder bármely két szemközti élpárjának felezőpontjai paralelogrammát alkotnak.

Vektorok alkalmazása a síkban és a térben – megoldások

2568 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}.$

2569 Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsából az átlóinak O metszéspontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{AO}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

Az O pontot eltolva $2\cdot\overrightarrow{BC}=2\cdot\vec{b}$ vektorral O' pontot kapjuk:

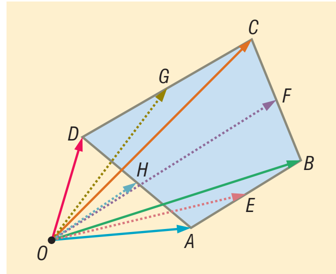
$$\overrightarrow{AO'}=\overrightarrow{AO}+2\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+2\cdot\vec{b}=\frac{\vec{a}+5\cdot\vec{b}}{2}.$$

Az A csúcsból az eltolt paralelogramma átlóinak metszéspontjába mutató vektor:

$$\frac{\vec{a}+5\cdot\vec{b}}{2}.$$



2570 A sík egy tetszőleges O pontjából az ábra pontjaiba mutató helyvektorokat jelöljük ugyanolyan kisbetűvel, mint az ábrán lévő betű.



Az ábrán látható $ABCD$ négyszög oldalainak felezőpontjai E, F, G és H. Bizonyítandó, hogy $e+\vec{f}+\vec{g}+\vec{h}=a+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

Egy vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe:

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{f}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{g}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\quad \text{és}\quad \vec{h}=\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}.$$

Ez alapján:

$$e+\vec{f}+\vec{g}+\vec{h}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}.$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

2571 *a)* $\overrightarrow{BC}=2\cdot\left(\vec{f}-\vec{b}\right)$; *b)* $\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\overrightarrow{BC}=2\cdot\vec{f}-\vec{b}$;

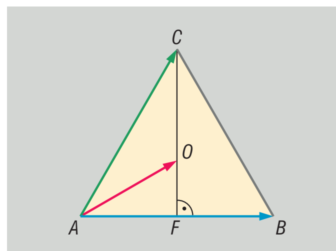
c) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\cdot\vec{f}-\vec{b}-\vec{a}$.

2572 *a)* $\dfrac{2\cdot\vec{a}+\vec{b}}{3}$; *b)* $\dfrac{3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{5}$; *c)* $\dfrac{10\cdot\vec{a}+\vec{b}}{11}$;

d) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\vec{a}+\vec{b}}{1+\sqrt{2}}=\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\vec{a}+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\vec{b}$.

2573 *a)* Az ábra alapján:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}.$$



A szabályos háromszög köré írt körének középpontja a háromszög súlypontja is egyben, tehát O pont harmadolja a CF súlyvonalat. Az A vonatkoztatási pontból CF szakasz harmadolópontjába mutató vektort a szakasz végpontjaiba mutató vektorok segítségével kifejezhetjük:

$$\overrightarrow{AO}=\frac{2\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{2\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}.$$

b) Az előzőekből következik, hogy a keresett arány:

$$\frac{\left|\overrightarrow{CF}\right|}{\left|\overrightarrow{CO}\right|}=\frac{3}{2}.$$

2574 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4\cdot\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{AC}}{7}$, és $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$.

2575 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3\cdot\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}}{5}$.

2576 *a)* $\vec{b}=\dfrac{7\cdot\vec{p}-4\cdot\vec{a}}{3}$; *b)* $\vec{b}=4\cdot\vec{p}-3\cdot\vec{a}$; *c)* $\vec{b}=\dfrac{12\cdot\vec{p}-7\cdot\vec{a}}{5}$.

2577 A bizonyítás a 2570. feladat alapján történhet.

2578 Az ABC háromszög súlypontjából a BDC háromszög súlypontjába mutató vektor:

$$\frac{\vec{d}-\vec{a}}{3}.$$

2579 Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba mutat.

A súlypontra vonatkozó összefüggés alapján:

$$\vec{s}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad \text{és} \quad \vec{p}=\frac{\vec{e}+\vec{f}+\vec{g}}{3}.$$

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}=(\vec{e}-\vec{a})+(\vec{f}-\vec{b})+(\vec{g}-\vec{c})=(\vec{e}+\vec{f}+\vec{g})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=3\cdot(\vec{p}-\vec{s})=3\cdot\overrightarrow{SP},$$

amit bizonyítani kellett.

2580 Az AB oldalél felezőpontjából a tetraéder súlypontjába mutató vektor:

$$\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}}{4}.$$

2581 Egy vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe.

A tetraéder D csúcsából az ABC alaplap éleinek felezőpontjaiba mutató vektorokat az A, B és C csúcsokba mutató vektorok segítségével felírhatjuk:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}.$$

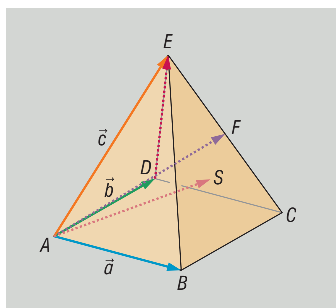
A D csúcsból az ABC alaplap éleinek felezőpontjai által meghatározott háromszög S súlypontjába mutató vektort a felezőpontokba mutató vektorok számtani közepeként kapjuk:

$$\overrightarrow{DS}=\frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

Ez a vektor azonos a D csúcsból az ABC háromszög súlypontjába mutató vektorral.

2582 *a)* A $\overrightarrow{DE}$ vektor felírható két vektor különbségeként:

$$\overrightarrow{DE}=\vec{c}-\vec{b}.$$



b) A vektorösszeadás paralelogrammaszabálya alapján:

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}, \quad \text{illetve} \quad \overrightarrow{AE}=\vec{c}.$$

Az A csúcsból a CE oldalél F felezőpontjába mutató vektor $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AE}$ számtani közepe:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}.$$

c) Az A csúcsból a BCE háromszög csúcsaiba mutató vektorok:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \quad \overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AE}=\vec{c}.$$

Az A csúcsból a háromszög S súlypontjába mutató vektor ezek számtani közepe:

$$\overrightarrow{AS}=\frac{2\cdot\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

2583 Egy tetszőleges vonatkoztatási pontból az ABC háromszög súlypontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

A vonatkoztatási pontból a háromszög AB, BC és CA oldalainak felezőpontjaiba mutató vektorok rendre:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\quad \text{és}\quad \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}.$$

A súlypontból a háromszög oldalainak felezőpontjaiba mutató vektorok:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-2\cdot\vec{c}}{6},$$

$$\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-2\cdot\vec{a}}{6},$$

$$\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{c}+\vec{a}-2\cdot\vec{b}}{6}.$$

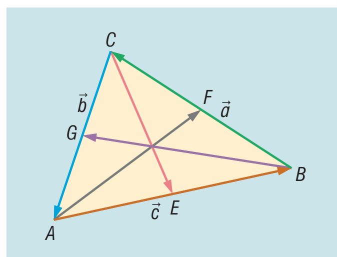
A felezőpontokba mutató vektorok összege nullvektor.

2584 A sokszög oldalait „körbe” mint vektorokat irányítva, összegük nullvektor.

Mivel $\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_3F_4}+\ldots+\overrightarrow{F_{2007}F_{2008}}+\overrightarrow{F_{2008}F_1}$ az oldalvektorok összegével egyenlő:

$$\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_3F_4}+\ldots+\overrightarrow{F_{2007}F_{2008}}+\overrightarrow{F_{2008}F_1}=\vec{0}.$$

2585 Ha három vektor összege nullvektor, akkor azokat egymáshoz fűzve az első vektor kezdőpontja egybeesik a harmadik végpontjával, tehát háromszöget alkot. Elég megmutatni, hogy a háromszög súlyvonalait mint vektorokat alkalmasan irányítva, azok összege nullvektor.



Legyenek az ABC háromszög oldalaiból képzett vektorok: $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ és $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$. Ezen három vektor összege nullvektor.

Az ábra jelöléseit használva az AB oldal felezőpontja E, a BC oldal felezőpontja F és az AC oldal felezőpontja G.

Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével állítsuk elő a súlyvonalak vektorait:

$$\overrightarrow{AF}=\vec{c}+\frac{\vec{a}}{2},\quad \overrightarrow{BG}=\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}\quad \text{és}\quad \overrightarrow{CE}=\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}.$$

Ezek összege:

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{0},$$

vagyis a súlyvonalak szakaszait el lehet úgy tolni, hogy azok egy háromszög oldalait alkossák.

2586 Ismert, hogy bármely vonatkoztatási pontból egy tetraéder súlypontjába mutató helyvektort ki lehet számítani a vonatkoztatási pontból a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepeként. Legyen most a vonatkoztatási pont éppen az $ABCD$ tetraéder S súlypontja. Ebből a pontból a csúcsokba mutató helyvektorokat jelöljük ugyanolyan kisbetűvel, mint a csúcs betűjele. Az előzőek alapján:

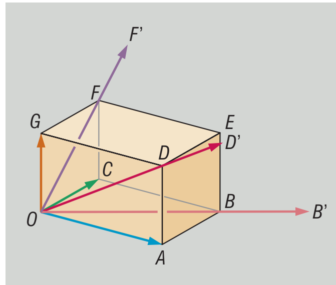
$$\overrightarrow{SS}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

Mivel egy pontból önmagába irányított vektor a nullvektor:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}.$$

Egy tetraéder súlypontjából a csúcsokba mutató vektorok összege nullvektor.

2587 Az ábra jelöléseit használva a meghosszabbított lapátlók vektorai:



$$\overrightarrow{OB'}=\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right),\quad \overrightarrow{OD'}=\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}\right),$$

$$\overrightarrow{OF'}=\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Ismert, hogy egy vonatkoztatási pontból egy háromszög súlypontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe, tehát az O csúcsból a $B'D'F'$ háromszög S súlypontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{OS}=\frac{\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OD'}+\overrightarrow{OF'}}{3}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}\right)}{3}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}.$$

Mivel O pontból az E pontba mutató helyvektor is $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}$, az E és az S pontok azonosak.

2588 Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai legyenek A, B és C. Tegyük fel, hogy a C pont az AB szakaszt $m:n$ arányban osztja úgy, hogy $AC:CB=m:n$.

Ismert, hogy $\vec{c}$ vektor előáll a következő alakban:

$$\vec{c}=\frac{n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{n+m}.$$

Ezt írhatjuk a következő formában:

$$\vec{c}=\frac{n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{n+m}=\frac{n}{n+m}\cdot\vec{a}+\frac{m}{n+m}\cdot\vec{b}.$$

Mivel $\frac{n}{n+m}+\frac{m}{n+m}=1$, az állítást bizonyítottuk.

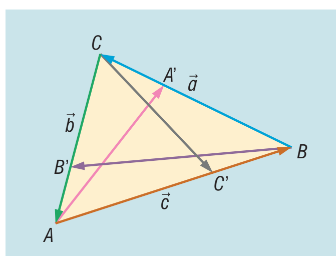
Hasonlóan bizonyítható az állítás, ha a C az AB szakaszon kívül van.

2589 Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai legyenek A, B és C. Ekkor:

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+(1-\alpha)\cdot\vec{b}-\vec{a}=(1-\alpha)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak, tehát az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesre esnek.

2590 Legyenek az ABC háromszög oldalaiból képzett vektorok: $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ és $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$. Ezen három vektor háromszöget alkot, összegük nullvektor.



Ha három vektor összege nullvektor, akkor azokat egymáshoz fűzve az első vektor kezdőpontja egybeesik a harmadik végpontjával, tehát háromszöget alkot.

Ez alapján elég megmutatni, hogy az $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{CC'}$ vektorok összege is nullvektor.

Mivel az A', B' és C' pontok a megfelelő oldalakat azonos arányban osztják:

$$\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = \lambda,$$

amiből következik, hogy:

$$\overrightarrow{BA'} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda \cdot \vec{a}, \quad \overrightarrow{CB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{CA} = \lambda \cdot \vec{b} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AC'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \vec{c}.$$

Fejezzük ki az oldalak vektoraival az $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{CC'}$ vektorokat:

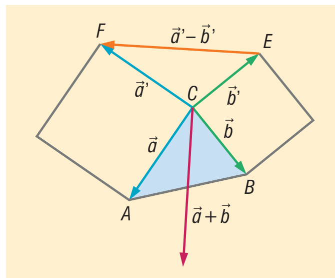
$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \vec{c} + \lambda \cdot \vec{a},$$
$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b},$$
$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{c}.$$

Ezek összegére adódik:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = (\lambda + 1) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{0}.$$

Tehát az AA', BB' és CC' szakaszokat egy háromszöggé lehet összetolni.

2591 Az ábra jelöléseit használva elég belátni, hogy $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, hiszen az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor a paralelogrammaszabály alapján a súlyvonal vektorának kétszerese.

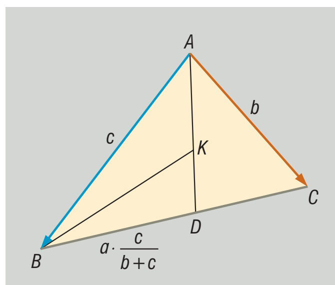


Az $\vec{a}$ vektor $-90°$-os forgatottja $\vec{a}'$, a $\vec{b}$ vektor $-90°$-os forgatottja $-\vec{b}'$. Ez alapján az $\vec{a} + \vec{b}$ vektornak is $-90°$-os forgatottja az $\overrightarrow{EF} = \vec{a}' - \vec{b}'$ vektor. A forgatás távolságtartó transzformáció, ezért $\vec{a} + \vec{b}$ és $\overrightarrow{EF}$ vektorok egyenlő hosszúak.

Tehát az EF a háromszög C csúcsából induló súlyvonalának kétszerese.

A többi súlyvonalra is hasonlóan bizonyítható az állítás.

2592 A háromszög beírt körének középpontját a belső szögfelezők metszéspontja adja.



Tudjuk, hogy egy háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

Az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelező az a hosszúságú oldalt egy olyan D belső pontban metszi, amelyre igaz, hogy $BD : DC = c : b$. A BD szakasz hossza tehát:

$$a \cdot \frac{c}{b + c}.$$

Az ABC háromszög B csúcsánál levő belső szögfelezője az AD szakaszt a háromszög beírt körének K középpontjában metszi. Ez a szögfelező az ABD háromszög B csúcsánál levő belső szögfelezője is, tehát az AD oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja:

$$\frac{AK}{KD} = \frac{c}{a \cdot \frac{c}{b + c}} = \frac{b + c}{a}.$$

Ismert, ha P pont az AB szakasz azon osztópontja, amelyre $AP : PB = m : n$, akkor egy rögzített O vonatoztatási pont esetén az A és a B végpontok $\vec{a}$ és $\vec{b}$ helyvektoraira, és a P osztópont $\vec{p}$ helyvektorára fennáll a következő összefüggés:

$$\vec{p} = \frac{n \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}}{n + m}.$$



Az O vonatkoztatási pontot tekintve az A, B és C csúcsok helyvektorai rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Mivel $BD:DC = c:b$, az osztópont helyvektorára vonatkozó képlet szerint:

$$\overrightarrow{OD} = \frac{b\cdot\vec{b} + c\cdot\vec{c}}{b+c}.$$

Mivel

$$\frac{AK}{KD} = \frac{b+c}{a},$$

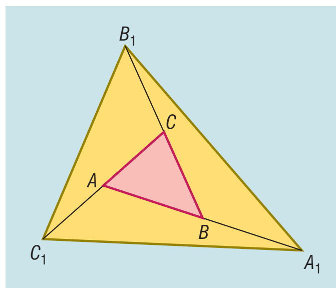
ezért

$$\overrightarrow{OK} = \frac{a\cdot\vec{a} + (b+c)\cdot\overrightarrow{OD}}{a+(b+c)} = \frac{a\cdot\vec{a} + (b+c)\cdot\dfrac{b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{b+c}}{a+(b+c)} = \frac{a\cdot\vec{a}+b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{a+b+c}.$$

Tehát a beírt kör középpontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{a\cdot\vec{a}+b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{a+b+c}.$$

2593 Egy tetszőleges, de rögzített O vonatkoztatási pontból az ABC háromszög A, B és C csúcsaiba mutató helyvektorok legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$, valamint az $A_1B_1C_1$ háromszög A_1, B_1 és C_1 csúcsaiba mutató helyvektorok rendre $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ és $\vec{c_1}$. Ha az adott $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ és $\vec{c_1}$ vektorok felhasználásával az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok szerkesztésére eljárást tudunk adni, akkor a feladatot megoldottuk.



Mivel az A pont felezi a CC_1 szakaszt, felírható:

$$\vec{a} = \frac{\vec{c}+\vec{c_1}}{2} \;\Rightarrow\; 2\cdot\vec{a} = \vec{c}+\vec{c_1}. \quad (1)$$

Hasonlóan:

$$\vec{c} = \frac{\vec{b}+\vec{b_1}}{2} \;\Rightarrow\; 2\cdot\vec{c} = \vec{b}+\vec{b_1}, \quad (2)$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}+\vec{a_1}}{2} \;\Rightarrow\; 2\cdot\vec{b} = \vec{a}+\vec{a_1}. \quad (3)$$

Az (1) egyenlet kétszeresét hozzáadva a (2) egyenlethez, adódik:

$$4\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{c} = 2\cdot\vec{c} + 2\cdot\vec{c_1} + \vec{b} + \vec{b_1} \;\Rightarrow\; 4\cdot\vec{a} = 2\cdot\vec{c_1} + \vec{b} + \vec{b_1}. \quad (4)$$

A (4) egyenlet kétszeresét a (3) egyenlethez adva:

$$8\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{b} = 4\cdot\vec{c_1} + 2\cdot\vec{b} + 2\cdot\vec{b_1} + \vec{a} + \vec{a_1} \;\Rightarrow\; 8\cdot\vec{a} = 4\cdot\vec{c_1} + 2\cdot\vec{b_1} + \vec{a} + \vec{a_1}.$$

Ez utóbbi egyenletből $\vec{a}$-t kifejezve:

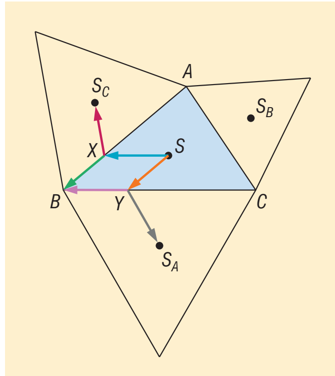
$$\vec{a} = \frac{4\cdot\vec{c_1} + 2\cdot\vec{b_1} + \vec{a_1}}{7}.$$

Hasonlóan:

$$\vec{b} = \frac{4\cdot\vec{a_1} + 2\cdot\vec{c_1} + \vec{b_1}}{7} \quad \text{és} \quad \vec{c} = \frac{4\cdot\vec{b_1} + 2\cdot\vec{a_1} + \vec{c_1}}{7}.$$

Ezek alapján az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok szerkeszthetők az $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ és $\vec{c_1}$ vektorok ismeretében.

2594 Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen az ABC háromszög súlypontja S, a háromszög oldalaira kifelé rajzolt szabályos háromszögek középpontjai S_A, S_B és S_C.



Az AB oldal B-hez közelebbi harmadolópontja legyen X, a BC oldal B-hez közelebbi harmadolópontja legyen Y.

A $BYSX$ négyszög az S súlypont harmadoló tulajdonsága miatt paralelogramma:

$$\overrightarrow{SY} = \overrightarrow{XB} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{SX} = \overrightarrow{YB}.$$

Ezért:

$$\overrightarrow{SS_C} = \overrightarrow{SX} + \overrightarrow{XS_C} = \overrightarrow{YB} + \overrightarrow{XS_C}$$

és

$$\overrightarrow{SS_A} = \overrightarrow{SY} + \overrightarrow{YS_A} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{YS_A}.$$

Mivel a háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket rajzoltunk:

$$XB = XS_C \quad \text{és} \quad YB = YS_A,$$

és páronként 120°-os szöget zárnak be.

Ebből adódóan $\overrightarrow{XS_C}$ vektor az $\overrightarrow{XB}$ vektor –120°-os forgatottja, és az $\overrightarrow{YB}$ vektor az $\overrightarrow{YS_A}$ vektor –120°-os forgatottja.

Tehát az $\overrightarrow{SS_C}$ vektor $\overrightarrow{XS_C}$ és $\overrightarrow{YB}$ összetevői az $\overrightarrow{SS_A}$ vektor $\overrightarrow{XB}$ és $\overrightarrow{YS_A}$ összetevőinek –120°-os forgatottja.

Ez azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{SS_C}$ vektor az $\overrightarrow{SS_A}$ vektor –120°-os forgatottja.

Hasonlóan belátható, hogy az $\overrightarrow{SS_B}$ vektor az $\overrightarrow{SS_C}$ vektor –120°-os forgatottja.

Tehát $S_AS_BS_C$ háromszög szabályos, és súlypontja S.

Vektorok a koordináta-rendszerben, vektor koordinátái, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal – megoldások

2595 A szerkesztés során használhatjuk a párhuzamos szelők tételét és a magasságtételt.

2596 A 2595. feladatnak megfelelően járhatunk el.

2597 *a)* Az x tengelyre vonatkozó tükrözéskor a vektor első koordinátája marad változatlanul, a második koordinátája az ellentettjére változik.

b) Az y tengelyre vonatkozó tükrözéskor a vektor második koordinátája marad változatlanul, az első koordinátája az ellentettjére változik.

c) Az origóra vonatkozó tükrözéskor a vektor első és második koordinátája is az ellentettjére változik.

d) Az origón áthaladó és az x tengely pozitív felével 45°-os szöget bezáró egyenesre vonatkozó tükrözéskor a vektor első és második koordinátája felcserélődik.

2598 *a)* A helyvektorok végpontjának halmaza az x tengely.

b) A helyvektorok végpontjának halmaza az y tengely.

c) A helyvektorok végpontjának halmaza egy olyan egyenes, amely az y tengelyt a –3 pontjában metszi és az x tengellyel párhuzamos.

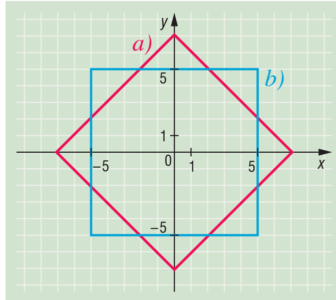
d) A helyvektorok végpontjának halmaza egy olyan egyenes, amely az x tengelyt a 2 pontjában metszi és az y tengellyel párhuzamos.

2599 *a)* Ha a négyzet oldala 10 egység hosszú, akkor az átlója $10 \cdot \sqrt{2}$. A középpontjának a csúcsoktól vett távolsága $5 \cdot \sqrt{2}$. Tehát a csúcsok helyvektorai:

$$\left(5 \cdot \sqrt{2};\ 0\right),\quad \left(0;\ 5 \cdot \sqrt{2}\right),\quad \left(-5 \cdot \sqrt{2};\ 0\right)\quad \text{és}\quad \left(0;\ -5 \cdot \sqrt{2}\right).$$

b) A négyzet oldala 10 egység hosszú, így az oldalaknak a tengelyektől vett távolsága 5 egység, vagyis a csúcspontok helyvektorai:

$$(5;\ 5),\quad (-5;\ 5),\quad (-5;\ -5)\quad \text{és}\quad (5;\ -5).$$



2600 *a)* $(8;\ -12)$; *b)* $\left(\dfrac{2}{3};\ -1\right)$; *c)* $(126;\ -189)$.

2601 *a)* $\left(0{,}5;\ -\dfrac{3}{2}\right)$; *b)* $(2;\ -6)$; *c)* $(5;\ 12{,}6)$;
d) $(1{,}375;\ 0{,}475)$.

2602 *a)* $\overrightarrow{AB}(-13;\ -4)$; *b)* $\overrightarrow{AB}(-17;\ 10)$; *c)* $\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{3};\ -6\right)$;
d) $\overrightarrow{AB}(a-8;\ 5-b)$.

2603 Egy szakasz vektorát megkaphatjuk úgy, hogy a végpont helyvektorából kivonjuk a kezdőpont helyvektorát. Tehát:

$$\overrightarrow{AB}(-6;4),\quad \overrightarrow{BC}(7;2)\quad \text{és}\quad \overrightarrow{CA}(-1;-6).$$

Ezen vektorok összege a nullvektor.

2604 Az A pont képének helyvektorát megkaphatjuk úgy, hogy az A pont helyvektorához hozzáadjuk a $\vec{v}$ vektort. Az A pont képének helyvektora: (3; 8). Az A pont képe:
a) $A'(3;\ 8)$; *b)* $A'(-4;\ 11)$; *c)* $A'\left(\sqrt{3}-2;\ 8\right)$; *d)* $A'(0;\ 0)$.

2605 A négy pont négyszöget határoz meg és $\overrightarrow{AB}(3, -5)$, illetve $\overrightarrow{CD}(3; -5)$. Mivel a két vektor egyenlő, a négy pont által meghatározott négyszög szemben levő oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, tehát paralelogrammát határoznak meg.

2606 Az $\overrightarrow{AB}(1;\ 2)$ és az $\overrightarrow{AC}(2004;\ 4008)$. Mivel az $\overrightarrow{AC} = 2004 \cdot \overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak, tehát a B és C végpontjaik A-val egy egyenesbe esnek.
Bebizonyítottuk, hogy az $A(4;\ 7)$, $B(5;\ 9)$ és $C(2008;\ 4015)$ pontok egy egyenesre esnek.

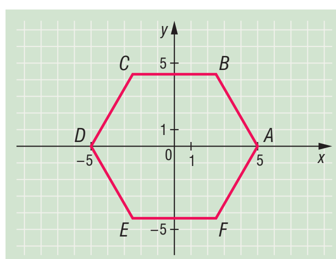
2607 Egy szabályos hatszög oldalai a köré írt körének középpontjából 60º-os szög alatt látszanak, tehát a hatszög köré írt körének sugara éppen a hatszög oldala.

a) Az $ABCDEF$ szabályos hatszög A csúcsa illeszkedjen az x tengely pozitív felére.

Mivel a hatszög oldala 5 egység hosszú, a hatszög köré írt körének sugara is 5 egység $\Rightarrow A(5;\ 0)$ és $D(-5;\ 0)$.

A hatszög B, C, E és F csúcsának koordinátái előjelesen egy olyan derékszögű háromszögnek a befogói, amelyek egyik hegyesszöge 60º, átfogója 5 egység.

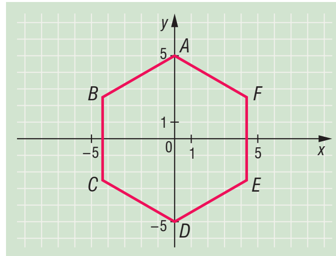
Tehát:



$$B\left(\frac{5}{2};\ \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}\right),\quad C\left(-\frac{5}{2};\ \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}\right),\quad E\left(-\frac{5}{2};\ -\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}\right),\quad F\left(\frac{5}{2};\ -\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}\right).$$



b) Ha az $ABCDEF$ szabályos hatszög A csúcsa az y tengely pozitív felére illeszkedik, akkor:



$$A(0;5),\quad B\left(-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2}\right),\quad C\left(-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};-\frac{5}{2}\right),$$

$$D(0;-5),\quad E\left(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};-\frac{5}{2}\right),\quad F\left(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2}\right).$$

2608 *a)* A helyvektorok végpontjainak halmaza az első és harmadik síknegyed szögfelzői.

b) A helyvektorok végpontjainak halmaza a második és negyedik síknegyed szögfelzői.

c) A helyvektorok végpontjainak halmaza az első és második síknegyed szögfelzői.

d) A helyvektorok végpontjainak halmaza az első és negyedik síknegyed szögfelzői.

e) A helyvektorok végpontjainak halmaza a négy síknegyed szögfelzői.

2609 A $\vec{v}\left(\frac{p-2}{5-p};p^2+p-12\right)$ vektor két koordinátájára egyszerre kell teljesülni, hogy:

$$\frac{p-2}{5-p}\geq 0 \quad \text{és} \quad p^2+p-12\geq 0.$$

Az első egyenlőtlenség megoldása: $2\leq p<5$.

A második egyenlőtlenség megoldása: $p\geq 3$ vagy $p\leq -4$.

Az két egyenlőtlenség közös megoldása: $3\leq p<5$.

Ez utóbbi egyenlőtlenségrendszert a $p=3$ és $p=4$ egészek elégítik ki.

Tehát két olyan p egész szám van, amelyre a $\vec{v}\left(\frac{p-2}{5-p};p^2+p-12\right)$ helyvektor mindkét koordinátája nemnegatív: $p=3$ és $p=4$.

2610 A $\vec{v}\left(\frac{5n+2}{4};\frac{n^2+6}{n-1}\right)$ második koordinátája más alakba átírva: $\frac{n^2+6}{n-1}=n+1+\frac{7}{n-1}$.

Mivel n egész, ez a kifejezés akkor egész, ha $\frac{7}{n-1}$ egész.

A $\frac{7}{n-1}$ kifejezés akkor lesz egész, ha $n-1$ osztója a 7-nek. Az $n-1$ lehet: –7, –1, 1, 7.

A második koordináta tehát akkor egész, ha $n=-6,\ 0,\ 2$ vagy 8.

Ezen n-ek közül az első koordináta csak $n=2$ és $n=-6$ esetén egész.

Tehát a $\vec{v}\left(\frac{5n+2}{4};\frac{n^2+6}{n-1}\right)$ helyvektor mindkét koordinátája $n=2$ és $n=-6$ esetén egész.

2611 Az első koordináták összege:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\ldots+\frac{1}{2008\cdot 2009}.$$

A törteket elemi törtekre bontva:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\ldots+\frac{1}{2008\cdot 2009}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}.$$



A közbülső tagok összege 0, így az első koordináták összege:

$$1-\frac{1}{2009}=\frac{2008}{2009}.$$

A második koordináták összege:

$$1+2+3+\ldots+k+\ldots+2007+2008=$$
$$=\frac{2008\cdot 2009}{2}=2017036.$$

Az összegvektor tehát:

$$\left(\frac{2008}{2009};2017036\right).$$

Vegyes feladatok III. – megoldások

2612 *a)* 20 egység; *b)* 19,32 egység; *c)* 14,14 egység; *d)* 6,84 egység; *e)* 0 egység.

2613 Az eredő mindkét esetben nullvektor.

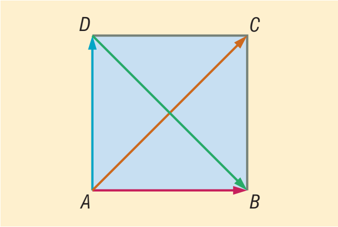
2614 A felezőpontokat összekötő vektor: $\dfrac{\vec{a}-\vec{c}}{2}$.

2615 Az ábra alapján:

$$\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}+\frac{\overrightarrow{DB}}{2}$$

és

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}-\frac{\overrightarrow{DB}}{2}.$$



Az $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ hossza az $\overrightarrow{AB}$ hosszának kétszerese, vagyis 4 egység.

2616 Az $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ és $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ egységnyi hosszú vektorok. A paralelogrammaszabály alapján a két vektor rombuszt feszít ki, amelynek átlója felezi az annál a csúcsnál levő szöget, amelyből kiindul, tehát az állítás igaz.

2617 *a)* $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$; *b)* $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{BA}=-\vec{c}$;

c) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}-2\cdot\overrightarrow{SC}=-2\cdot\overrightarrow{SC}=-2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot\vec{c}+\vec{a}\right)=-\dfrac{2}{3}\cdot\vec{c}-\dfrac{4}{3}\cdot\vec{a}.$

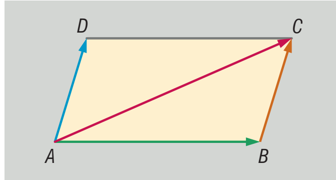
2618 $\overrightarrow{HP}=\dfrac{9\cdot\vec{d}-5\cdot\vec{b}-4\cdot\vec{c}}{15}.$

2619 A harmadolópontba mutató vektor:

$$\frac{2\cdot\vec{x}+\vec{y}}{3}=\frac{2\cdot\left(2\cdot\vec{a}-5\cdot\vec{b}\right)+\left(3\cdot\vec{b}-4\cdot\vec{a}\right)}{3}=-\frac{7\cdot\vec{b}}{3}.$$

2620 Tekintsük a mellékelt ábrát, és használjuk fel, hogy:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \text{valamint} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$



A bal oldalt alakítva éppen a jobb oldalhoz jutunk:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{BC}.$$

2621 $\overrightarrow{FH} = \dfrac{4 \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{a} - \vec{b}}{6}.$

2622 *a)* $\overrightarrow{AB}(3;10)$, $\overrightarrow{BC}(1;-6)$ és $\overrightarrow{CA}(-4;-4)$.

b) $A'\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $B'\left(-2;-\frac{7}{2}\right)$ és $C'\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

c) $C''(8;\ 11)$.

d) A négyszög paralelogrammma.

2623 A két szélső kutya által kifejtett erő összege a középső kutya irányába mutat, és nagysága:

$$2 \cdot 200 \cdot \cos 22^\circ \approx 370{,}87 \text{ N}.$$

Ehhez a vektorhoz adjuk még a harmadik kutya által kifejtett 200 N nagyságú vektort. A három kutya 570,87 N erővel húzza a szánt.

2624 Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba vezet. A felezőpont képlete alapján számolunk:

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \vec{q} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}.$$

Írjuk fel az AB, CD és PQ szakaszok felezőpontjaiba mutató vektorokat.

Azt kell bizonyítani, hogy a következő vektorok végpontjai egy egyenesre esnek:

$$\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}, \quad \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$

Mivel a két első vektor összegének a fele éppen a harmadik vektor, ezért a három vektor végpontja egy egyenesbe esik, és PQ felezőpontja felezi az AB és CD szakaszok felezőpontjai által meghatározott szakaszt.

2625 $x = -10$ és $y = 1$.

2626 Egy tetszőleges, de rögzített O vonatkoztatási pontból a hatszög csúcsaiba vezető vektorok legyenek az adott körüljárási irány szerint $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$. A felezőpontokba mutató vektorok ezek segítségével kifejezhetők:

$$\vec{f_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \vec{f_2} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \quad \vec{f_3} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2},$$

$$\vec{f_4} = \frac{\vec{d} + \vec{e}}{2}, \quad \vec{f_5} = \frac{\vec{e} + \vec{f}}{2}, \quad \vec{f_6} = \frac{\vec{f} + \vec{a}}{2}.$$

Az O pontból az $F_1F_3F_5$ háromszög súlypontjába mutató vektor:

$$\vec{s_1} = \frac{\vec{f_1} + \vec{f_3} + \vec{f_5}}{3} = \frac{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2} + \frac{\vec{e} + \vec{f}}{2}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}}{6}.$$



Az O pontból az $F_2F_4F_6$ háromszög súlypontjába mutató vektor:

$$\vec{s_2} = \frac{\vec{f_2} + \vec{f_4} + \vec{f_6}}{3} = \frac{\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{d} + \vec{e}}{2} + \frac{\vec{f} + \vec{a}}{2}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}}{6}.$$

Az O pontból kiinduló $F_1F_3F_5$ és $F_2F_4F_6$ háromszögek súlypontjába mutató vektorok egyenlők, tehát a két háromszög súlypontja azonos.

2627 A feltétel szerint az $\overrightarrow{AB}(x-4;\ 15)$ és $\overrightarrow{AC}(-11;\ 14)$ vektorok párhuzamosak, tehát létezik egy olyan α valós szám, hogy $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow x - 4 = \alpha \cdot (-11)$. Felhasználva, hogy $15 = \alpha \cdot 14$:

$$x = -\frac{109}{14}.$$

2628 Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba vezet.

A P pont A-ra vonatkozó tükörképe legyen P_1, P_1 B-re vonatkozó tükörképe P_2, és így tovább. Be kell bizonyítani, hogy a P_4 és a P pontok azonosak.

A tükrözések miatt:

$$\vec{p_1} = 2 \cdot \vec{a} - \vec{p},$$
$$\vec{p_2} = 2 \cdot \vec{b} - \vec{p_1} = 2 \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \vec{p},$$
$$\vec{p_3} = 2 \cdot \vec{c} - \vec{p_2} = 2 \cdot \left(\vec{c} - \vec{b} + \vec{a}\right) - \vec{p},$$
$$\vec{p_4} = 2 \cdot \vec{d} - \vec{p_3} = 2 \cdot \left(\vec{d} - \vec{c} + \vec{b} - \vec{a}\right) + \vec{p}.$$

Mivel paralelogrammáról van szó:

$$\vec{d} - \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{d} - \vec{c} + \vec{b} - \vec{a} = \vec{0},$$

vagyis P és P_4 helyvektora egyenlő, tehát P és P_4 pontok azonosak.

2629 A 2567. feladat jelöléseit használva egy rögzített, de tetszőleges O vonatkoztatási pontból az AC és a BD szemközti élek F és H felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjába mutató helyvektor az $\vec{f}$ és $\vec{h}$ vektorok számtani közepe:

$$\frac{\vec{f} + \vec{h}}{2} = \frac{\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy egy tetraéder súlypontjába mutató helyvektort ki lehet számítani a vonatkoztatási pontból a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepeként:

$$\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$

Mivel az O pontból a súlypontba mutató helyvektor azonos az FH szakasz felezőpontjának helyvektorával, a súlypont és az FH szakasz felezőpontja ugyanaz a pont.

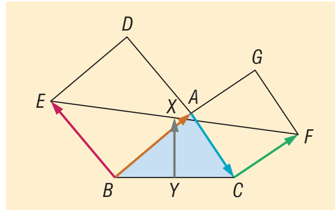
Hasonlóan járhatunk el bármely két szemközti él esetén.

Egy tetraéder súlypontja felezi a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszokat.

Ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy egy tetraéderben a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszok felezve metszik egymást.



2630 Legyen az EF felezőpontja X és BC felezőpontja Y.



A 2564. feladat alapján:

$$\overrightarrow{YX} = \frac{\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}}{2}.$$

A $\overrightarrow{BE}$ vektor $-90°$-os forgatottja $\overrightarrow{BA}$, a $\overrightarrow{CF}$ vektor $-90°$-os forgatottja pedig $\overrightarrow{AC}$.

Ebből következik, hogy:

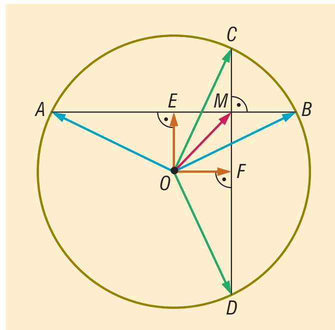
$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 2 \cdot \overrightarrow{YX},$$

és ennek a vektornak a $-90°$-os forgatottja:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

Ez azt jelenti, hogy XY távolság a BC távolság fele, tehát X valóban a BC átmérőjű körön van.

2631 Egy vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe.



A kör O középpontjából az AB húr E felezőpontjába mutató vektor merőleges AB-re, és:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Ugyanígy az O pontból a CD húr F felezőpontjába mutató vektor merőleges CD-re, és:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

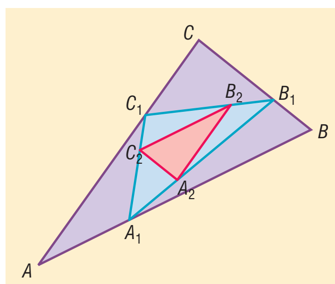
Mivel a két húr merőleges egymásra, az $OEMF$ négyszög téglalap, amelynek átlóvektora az oldalak vektorainak összege:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

Tehát:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}.$$

2632 Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba vezetnek.



A harmadolópontok helyvektorára vonatkozó összefüggésekből:

$$\vec{a_1} = \frac{2 \cdot \vec{a} + \vec{b}}{3}, \quad \vec{b_1} = \frac{2 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \vec{c_1} = \frac{2 \cdot \vec{c} + \vec{a}}{3},$$

$$\vec{a_2} = \frac{2 \cdot \vec{a_1} + \vec{b_1}}{3}, \quad \vec{b_2} = \frac{2 \cdot \vec{b_1} + \vec{c_1}}{3}, \quad \vec{c_2} = \frac{2 \cdot \vec{c_1} + \vec{a_1}}{3}.$$

Ezeket összevetve:

$$\vec{a_2} = \frac{2 \cdot \vec{a_1} + \vec{b_1}}{3} = \frac{\frac{4 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{3} + \frac{2 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{3}}{3} = \frac{4 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{9}.$$

Ugyanígy:

$$\vec{b_2} = \frac{4 \cdot \vec{b} + 4 \cdot \vec{c} + \vec{a}}{9}.$$

Tehát:

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{b_2} - \overrightarrow{a_2} = \frac{\vec{c} - \vec{a}}{3} = \frac{\overrightarrow{AC}}{3},$$

vagyis az AC oldal párhuzamos az A_2B_2 oldallal.

Hasonlóan adódik, hogy a BC oldal párhuzamos az A_2C_2 oldallal és az AB oldal párhuzamos a B_2C_2 oldallal.

Így az ABC és az $A_2B_2C_2$ háromszögek oldalai párhuzamosak, tehát a két háromszög hasonló.

A megoldásból az is kitűnik, hogy a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$.

A hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete, tehát:

$$\frac{T_{A_2B_2C_2\ \text{háromszög}}}{T_{ABC\ \text{háromszög}}} = \frac{1}{9}.$$